n 次の組立除法の原理と応用

福田（ふくだ） 仁己（よしみ）

1．はじめに

教科書では整式 $f(x)$ を 1 次式で割ったときの商と余りを求めるのに，組立除法が有効であると書いてありますが，2 次式以上で割るときも非常に便利であり，割る式と割られる式が明確なときは組立除法は強い味方となるのです．

例　$(2x^3+7x^2-5)\div(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 0 & -5 \\ -2 & \times & -4 & -6 & 12 \\ \hline & \underbrace{2 \quad 3 \quad -6}_{\text{商}} & & & \boxed{7}_{\text{余り}} \end{array}$$

商　$2x^2+3x-6$　　余り 7

$(4x^3+7x+3)\div(2x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 0 & 7 & 3 \\ \frac{3}{2} & \times & 6 & 9 & 24 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 16 & \boxed{27} \\ & 2 & 3 & 8 & \end{array}$$

$2x-3$
$=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

商　$2x^2+3x+8$　　余り 27

$(4x^5-8x^4-x^3+12x^2-3x-2)\div(2x^2-x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & -8 & -1 & 12 & -3 & -2 \\ \frac{1}{2} & \times & 2 & -3 & 1 & 2 & \times \\ \frac{3}{2} & \times & \times & 6 & -9 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & -6 & 2 & 4 & \boxed{2} & \boxed{4} \\ & 2 & -3 & 1 & 2 & & \end{array}$$

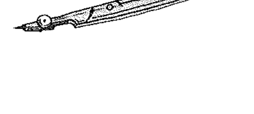
$2x^2-x-3$
$=2\left(x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)$

商　$2x^3-3x^2+x+2$　　余り　$2x+4$

$(x^5-3x^4-10x^3+6x^2+4x-1)\div(x^3+2x^2-x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & -10 & 6 & 4 & -1 \\ -2 & \times & -2 & 10 & -2 & \times & \times \\ 1 & \times & \times & 1 & -5 & 1 & \times \\ 1 & \times & \times & \times & 1 & -5 & 1 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -5 \quad 1}_{\text{商}} & & & \boxed{0 \quad 0 \quad 0}_{\text{余り}} & & \end{array}$$

商　x^2-5x+1　　余り　0



2. 組立除法の要領（n 次式で割るとき）

① ○ の左側の○数字は割る式の最高次の係数を $+1$ としたときの次の項の係数の符号を変えたものを順次縦に書く．

② 割る式の係数が $+1$ でないときの商は割る式の最高次の係数で更に割る．

③ ×の数は 2 次式で割るとき $4(=2^2)$，3 次式で割るときは $9(=3^2)$，4 次式で割るときは $16(=4^2)$，………
×の配分は左下と右上から三角形の形（三角数）に配分する．

④ 計算の手順は，まず割られる式の最高次の係数はそのまま下へ降ろし の左側の数字と掛けた積はその行へ×の横から書く，×は空とする．

⑤ n 次式で割るときは割られる式の係数を書いた下へ n 段，余りは右端から n 個の数を取る．

例

x^{20} を $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割った余りを求めよ．

割り算を実行してみる．

割られる数の次数

	(20)	(19)	(18)	(17)	(16)	(15)	……									(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	×	−1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0					0	−1	1	×	×	×
−1	×	×	−1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0				0	0	−1	1	×	×
−1	×	×	×	−1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0			0	0	0	−1	1	×
−1	×	×	×	×	−1	1	0	0	0	−1	1	0	0	0		1	0	0	0	−1	1
	1	−1	0	0	0	1	−1	0	0	0	1					1	−1	0	0	0	1
	(16)	(15)	(14)	(13)	(12)	(11)	(10)	(9)	(8)	(7)						(1)	(0)				

商の次数　繰り返し

商の係数は 5 次ごとの繰り返しであって商の次数が 5 の倍数のときの係数は -1，余りは右より 4 個の数字をとって 1 である．

類題

x^{100} を x^2+x+1 で割った余りは $\square x+\square$ であり，商の中で x^{56} の係数は $\square$，x^{55} の係数は $\square$，x^{54} の係数は $\square$ である．〔'89 上智大 経〕

割られる数の次数

	(100)	(99)	(98)	(97)	(96)								(3)	(2)	(1)	(0)
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	……		0	0	0	0
−1	×	−1	1	0	−1	1	0	−1	1				−1	1	0	×
−1	×	×	−1	1	0	−1	1	0	−1	1			0	−1	1	0
	1	−1	0	1	−1	0	1	−1	0		……	1	−1	0	1	0
	(98)	(97)	(96)	(95)	(94)	(93)						(2)	(1)	(0)		

商の次数　繰り返し

商は $x^{98}-x^{97}+0\cdot x^{96}$，$x^{95}-x^{94}+0\cdot x^{93}$，と 3 次ごとの繰り返しで商の次数が 3 で割り切れるとき，係数は 0
よって，余りは $x+0$
56は 3 で割ると 2 余るから x^{56} の係数は 1
55は 3 で割ると 1 余るから x^{55} の係数は -1
54は 3 で割ると割り切れるから x^{54} の係数は 0

例

> a, b, cを整式として，次の3つの整式を考える．
>
> $$f(x)=x^3+2ax^2+3bx+5c$$
> $$g(x)=x^2+5x-2(a-2b+c)$$
> $$h(x)=x^2+x+1$$
>
> (1) $f(x)$が$g(x)$で割り切れて，その商が$x+1$であるとき
>
> $$a=\square,\ b=\square,\ c=\square$$
>
> であり，$f(x)$を$h(x)$で割ったときの余りは$\square x+\square$である．
>
> (2) $f(x)$が$h(x)$で割り切れるときには
>
> $$b=\frac{\square}{\square}a,\quad c=\frac{\square a-\square}{\square}$$
>
> となる． 〔'96 センター試験〕

解

(1)

	1	$2a$	$3b$	$5c$
-5	×	-5	$-10a+25$	×
$2a-4b+2c$	×	×	$2a-4b+2c$	$4a^2-8ab+4ac-10a+20b-10c$
	1	$2a-5$	$-8a-b+2c+25$	$4a^2-(10+8b-4c)a+20b-5c$

商が$x+1$より　$2a-5=1$　$2a=6$　$\therefore\ \boldsymbol{a=3}$

このとき割り切れるから　$-24-b+2c+25=0$

$$36-3(10+8b-4c)+20b-5c=0$$

すなわち $\begin{cases}-b+2c=-1\\-4b+7c=-6\end{cases}$ これを解くと $\boldsymbol{b=5,\ \ c=2}$

(2)

	1	$2a$	$3b$	$5c$
-1	×	-1	$-2a+1$	×
-1	×	×	-1	$-2a+1$
	1	$2a-1$	$-2a+3b$	$-2a+5c+1$

割り切れるので　$-2a+3b=0$　$\therefore\ \boldsymbol{b=\frac{2}{3}a}$

$-2a+5c+1=0$　$\boldsymbol{c=\frac{2a-1}{5}}$

3．おわりに

3年連続して，センター試験に割り算が出題されています．従来の除法の原理や係数比較法の教え込みではなく，高次の割り算でも実際に割り算を実行して，先見力をつけられればと思います．

《参考文献》大木　實「組立除法について」(「数研通信」No.16)
熊野充博「組立除法の応用例」(「数研通信」No.20)

(大阪府立堺上高等学校)