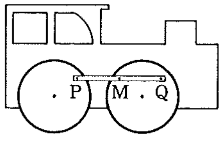
おもちゃの蒸気機関車

外処(とどころ)　直哉(なおや)

1 はじめに

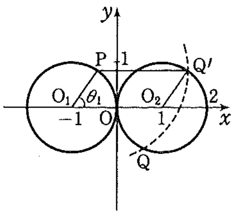


図Ⅰ

上図のように，動輪が２つのおもちゃの機関車が家にあります．そのまま床の上を転がせば，点P，点Qは当然の事ながら同方向に回転します．先日，点Pを正の向き，点Qを負の向きに動かしたところ，それほど無理なく回転していました．これはおもちゃの動きに誤差があるため，何となく回転してしまうのでしょうか．また，続けて回していると，２点P，Qの中点Mが不思議な動きをしていることに気付きました．そこで，この中点Mの軌跡の方程式が求められないだろうかと考えてみました．

2 動輪上の点の動き

まず一番単純な形として，２つの動輪を右図のように２つの円として考える．中心$(-1,0)$，半径１の円をO_1，中心$(1,\ 0)$，半径１の円をO_2とする．



図Ⅱ

点Pが原点Oを出発して，t秒後に$\theta_1=t$だけ回転したとすると，$P(-1+\cos t, \sin t)$となる．点Qが，点$(2,0)$を出発したとすると，点$Q'(1+\cos t, \sin t)$は，点Qが点Pと同方向に回転した場合である．

点Qが点Pと逆方向に回転した場合，$PQ=2$となる円O_2上の点は，点Pを中心とした半径２の円と円O_2との交点である．

円Pは

$$(x+1-\cos t)^2+(y-\sin t)^2=4 \quad \cdots\cdots ①$$

円O_2は

$$(x-1)^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の左辺を展開し，①－②を計算すると，

$$x(2-\cos t)-y\sin t-\cos t-1=0 \quad \cdots\cdots ③$$

とまとめることができる．これは①，②の交点を通る直線だから，③と②の交点を求める．

$2-\cos t \fallingdotseq 0$だから③より

$$x=\frac{y\sin t+\cos t+1}{2-\cos t}$$

これを②に代入して，

$$\left(\frac{y\sin t+\cos t+1}{2-\cos t}-1\right)^2+y^2=1$$

この式をyについてまとめると

$$(5-4\cos t)y^2+(4\sin t\cos t-2\sin t)y$$
$$+3\cos^2 t-3=0 \quad \cdots\cdots ④$$

図Ⅱより，$y=\sin t$が１つの解だから，④を$(y-\sin t)$で割って商を出すことにより④は，

$$(y-\sin t)\{(5-4\cos t)y+3\sin t\}=0$$

と因数分解できる．よって，もう１つの交点は，

$5-4\cos t \fallingdotseq 0$だから，

$$y=\frac{-3\sin t}{5-4\cos t} \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤を③に代入して

$$x(2-\cos t)-\left(\frac{-3\sin t}{5-4\cos t}\right)\sin t-\cos t-1=0$$

これをxについて解くと，$2-\cos t \fallingdotseq 0$だから，

$$x=\frac{\cos t+1}{5-4\cos t}$$

よって，点Pの座標が$(-1+\cos t, \sin t)$のとき，逆回転した点Qの座標は，

$$\left(\frac{\cos t+1}{5-4\cos t},\ \frac{-3\sin t}{5-4\cos t}\right) \quad \cdots\cdots ⑥$$

と表せる．つまり，おもちゃの機関車の動輪は，無理なく互いに逆方向へも回転できるということになる．

ところで，点Pを一定の速さで回転してみると，点Qは一定の速さで回転していないので，点Qの動

き方を調べてみる．

点Qの速さをvとすると，⑥より，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-9\sin t}{(5-4\cos t)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{12-15\cos t}{(5-4\cos t)^2}$$

だから，

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

にあてはめて，

$12\cos t+15>0$より

$$v=\frac{12\cos t+15}{(5-4\cos t)^2}$$

また，速さの変化を求めると

$$\frac{dv}{dt}=\frac{-\sin t(100+48\cos t)}{(5-4\cos t)^3}$$

よって，点Qは，速さが周期2πの周期運動をする．また，増減表を作ると，

t	0	…	π	…	2π
v'	0	−	0	+	0
v	27	↘	$\frac{3}{81}$	↗	27

だから点Qの速さは，

$0+2n\pi<t<\pi+2n\pi$　(nは整数)

で，減速され，

$\pi+2n\pi<t<2\pi+2n\pi$　(nは整数)

で，加速されることがわかり，常に速さを変えながら回転していることがわかる．

3 中点Mの軌跡

次に，2点P，Qの中点をM(x, y)とすると

$$x=\frac{1}{2}\left(-1+\cos t+\frac{\cos t+1}{5-4\cos t}\right)$$

$$=\frac{(1-2\cos t)(\cos t-2)}{5-4\cos t}\quad\cdots\cdots⑦$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\sin t+\frac{-3\sin t}{5-4\cos t}\right)$$

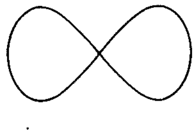
$$=\frac{(1-2\cos t)\sin t}{5-4\cos t}\quad\cdots\cdots⑧$$

この曲線は，連続で微分可能な曲線であるが，このままではどんな図形になるのか見当がつかない．

そこで，BASIC(98NOTE, N-88BASIC)を使って軌跡を描いてみた．次がそのプログラムである．

```
100 CLS 3
110 FOR S=0 TO 62830
120     T=S/1000
130     X=(1-2*COS(T))*(COS(T)-2)
      /(5-4*COS(T))
140     Y=SIN(T)*(1-2*COS(T))
      /(5-4*COS(T))
150     PSET(100*X+320,100*Y+100),7
160 NEXT S
170 END
```

これだけのプログラムで，右の図のような曲線が描ける．



図Ⅲ

これはレムニスケートの一種であるように思えるが，だんだんと調べていこうと思う．

次に，⑦，⑧で表された中点の軌跡を，tを消去しx, yだけで表示してみたい．そこで，この曲線が原点を通るときの傾きを求めてみる．

⑦をtで微分して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{20\sin t\cos t-8\sin t\cos^2 t-17\sin t}{(5-4\cos t)^2}$$

⑧をtで微分して

$$\frac{dy}{dt}=\frac{8\cos^3 t-20\cos^2 t+5\cos t+6}{(5-4\cos t)^2}$$

よって

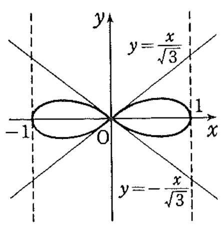
$$\frac{dy}{dx}=\frac{8\cos^3 t-20\cos^2 t+5\cos t+6}{20\sin t\cos t-8\sin t\cos^2 t-17\sin t}\cdots\cdots⑨$$

中点Mが原点を通るのは，$x=0$，$y=0$となるときで，⑦，⑧より$\cos t=\frac{1}{2}$のときであることがわかる．

よって，$t=\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ のときの接線の傾きを求めると，⑨より

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\left(t=\frac{1}{3}\pi\right),\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\left(t=\frac{5}{3}\pi\right)$$

また，$t=0, \pi, 2\pi$のときの傾きが∞であることから，中点Mのグラフは，右図のような曲線であることがわかる．



図Ⅳ

また，点(x, y)を上下に$\frac{1}{\sqrt{3}}$倍した点を(X, Y)とすると，$x=X$，$y=\sqrt{3}Y$

ここで，レムニスケートの方程式

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

を利用して，左辺はそのままで右辺を，

$$x^2-y^2=X^2-3Y^2$$

として，⑦，⑧を代入してみると

$$x^2+y^2=\frac{(1-2\cos t)^2}{5-4\cos t}$$

よって

$$(x^2+y^2)^2=\frac{(1-2\cos t)^4}{(5-4\cos t)^2} \quad \cdots\cdots ⑩$$

また

$$x^2-3y^2=\frac{(1-2\cos t)^4}{(5-4\cos t)^2} \quad \cdots\cdots ⑪$$

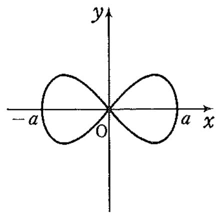
よって，⑩，⑪より中点Mの軌跡は，

$$(x^2+y^2)^2=x^2-3y^2 \quad \cdots\cdots ⑫$$

という，すっきりした高次曲線になることがわかる．なお，この曲線⑫は，『曲線の科学』(中森寛二，内藤 淳共著，コロナ社)をみると，レムニスケートの一種であることが，簡単な計算で確かめられる．

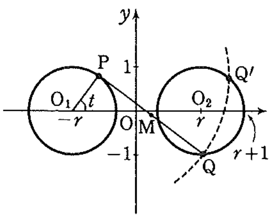
4 応用

応用として，半径aの動輪を考えてもよいと思うが，そのときの中点Mの軌跡が，右図のようになるのは予測がつくので，ここでは円の半径は1とし，2つの円の中心距離との相対的な位置関係に着目して考えてみる．



図V

下の図のように$r\geqq 1$として，円O_1を中心$(-r, 0)$，半径1の円，円O_2を中心$(r, 0)$，半径1の円とする．



図VI

図IIのときと同様に考えると，点Pの座標は

$$(-r+\cos t, \sin t)$$

点Pを中心とし半径$2r$の円の方程式は

$$(x+r-\cos t)^2+(y-\sin t)^2=4r^2 \quad \cdots\cdots ⑬$$

円O_2の方程式は

$$(x-r)^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots ⑭$$

⑬⑭の交点を通る直線は，⑬−⑭より

$$x(2r-\cos t)-y\sin t+1-2r^2-r\cos t=0 \cdots\cdots ⑮$$

⑭⑮の交点は，⑮より

$$x=\frac{y\sin t-1+2r^2+r\cos t}{2r-\cos t}$$

(∵ $r\geqq 1$のとき，$2r-\cos t\fallingdotseq 0$)

これを，⑭に代入してyについてまとめると

$$(4r^2+1-4r\cos t)y^2+(4r\sin t\cos t-2\sin t)y$$
$$+(1-4r^2)\sin^2 t=0 \quad \cdots\cdots ⑯$$

⑯を因数分解すると

$$(y-\sin t)\{(4r^2+1-4r\cos t)y+(4r^2-1)\sin t\}=0$$

$y=\sin t$は，点Qが点Pと同方向に回転した場合の解だから，求める点Qのy座標は

$$y=\frac{(1-4r^2)\sin t}{4r^2+1-4r\cos t} \quad \cdots\cdots ⑰$$

(∵ $r\geqq 1$のとき，$4r^2+1-4r\cos t\fallingdotseq 0$)

⑰を⑮に代入して点Qのx座標を求めると

$$x=\frac{\cos t+4r^3-3r}{4r^2+1-4r\cos t} \quad \cdots\cdots ⑱$$

よって，機関車の2つの動輪は，中心距離が任意の場合でも(ただし，$r\geqq 1$)，互いに逆方向へ回転することができる．

次に，2点P，Qの中点$M(x, y)$の軌跡を求めてみる．点Pの座標$(-r+\cos t, \sin t)$と，点Qの座標を表す⑰⑱より

$$x=\frac{(1-2r\cos t)(\cos t-2r)}{4r^2+1-4r\cos t} \quad \cdots\cdots ⑲$$

$$y=\frac{(1-2r\cos t)\sin t}{4r^2+1-4r\cos t} \quad \cdots\cdots ⑳$$

やっと中点の軌跡を媒介変数で表示できた．そこで今度は，この⑲⑳で表された曲線を，x, yだけで表示してみたいと思う．図IIから導かれた中点の軌跡の方程式⑫を見ていると，⑲⑳からtを消去したとき，

$$(x^2+y^2)^2=x^2-ky^2 \ (k\text{は定数})$$

と表されそうである．そこで，⑲⑳をこの式に代入してみると

$$(x^2+y^2)^2=\frac{(1-2r\cos t)^4}{(4r^2+1-4r\cos t)^2} \quad \cdots\cdots ㉑$$

$$x^2-ky^2=\frac{(1-2r\cos t)^2\{(\cos t-2r)^2-k(1-\cos^2 t)\}}{(4r^2+1-4r\cos t)^2} \quad \cdots\cdots ㉒$$

ここで，㉑=㉒となるためには，

$$(1-2r\cos t)^2=\{(\cos t-2r)^2-k(1-\cos^2 t)\} \cdots\cdots ㉓$$

であることが，必要十分である．

したがって　$k=4r^2-1$

よって，k が定数で表され，中点の軌跡は x, y だけで表されることになる．したがって，中点Mの軌跡を表す方程式は，

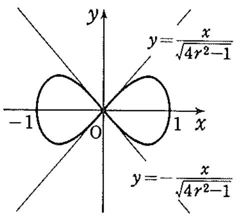
$$(x^2+y^2)^2=x^2-(4r^2-1)y^2 \quad \cdots\cdots ㉔$$

という，きれいな形にまとめることができる．

この㉔は，機関車の2つの動輪としては $r \geqq 1$ であるが，数学的には $0<r<1$ についても考えられる．

Ⅰ　$r>\frac{1}{2}$ のとき，

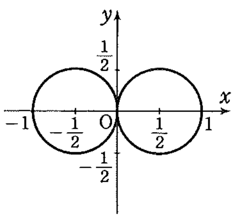
$(4r^2-1)>0$ だから㉔は右の図のような，レムニスケートを表す．



Ⅱ　$r=\frac{1}{2}$ のとき，㉔は，

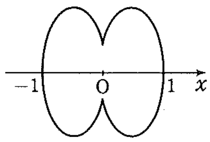
$(x^2+y^2)^2=x^2$

となり，右の図のような2つの円を表す．



Ⅲ　$\frac{1}{2}>r>0$ のとき，

$(4r^2-1)<0$ となり，これは右の図のような繭形の曲線を表し，「ブースのレムニスケート」とよばれている．



なお，r にいろいろな数値を入れて，パソコンに図形を描かせるプログラムを，次にあげておく．

```
100 CLS 3
110 INPUT "rの値";R
120 FOR S=0 TO 62830
130   T=S/10000
140   X=(1-2*R*COS(T))*(COS(T)-2*R)
            /(4*R^2+1-4*R*COS(T))
150   Y=SIN(T)*(1-2*R*COS(T))
            /(4*R^2+1-4*R*COS(T))
160   PSET(100*X+320,100*Y+100), 7
170 NEXT S
180 END
```

（なお，このプログラムはⅡのとき，分母が0となりエラーが出て使えない．また，N88BASICでは

10 SCREEN 3, 0

をつけ加えると上下左右の比が1：1になり，実際の点と同じ軌跡が描ける）

5 最後に

子どものおもちゃの動きの中にも，注意してみると，信じられないような面白い動きをする点があることに驚きました．何にでも興味を持つことの大切さを改めて感じました．

（群馬県立吉井高等学校）