高校１年生が発見した公式

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)={}_n\mathrm{H}_r\quad(\text{ただし，}r\text{は}\Sigma\text{の個数})$$

よこた　としろう
横田　稔良

## 1．はじめに

この公式は私が知らなかっただけかもしれない．なかなか綺麗な形をしているので，誰か昔に発見していてもよさそうな気がする．もしそうだったとしても，本校の高校１年生の井上君が自分で見つけたことに価値があるし，また，その後これを検討しているうちに私もいくつか意義のある点に気づいたので発表することにした．

私も自分なりに証明してみたかったので，一切書物を調べてみることをしなかった．もし，これについて書かれたものがあれば教えて頂きたい．

## 2．発見のいきさつ

$\Sigma$を学習し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

を公式として習ったあと，練習問題に

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)\right)=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

を求めさせるものがよく問題集にも載っている．前者の方はまだしも，後者の方となると結構計算はめんどうになる．ましてや

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{j}k\right)\right)\right)$$

を計算しようとすると，その煩雑さだけではなく，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$の公式をまず作らなければならないので，普通はこれ以上やってみようとは誰も思わない．ところが数学が好きな彼はこれに挑戦していった．

そして，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2!}n(n+1)$

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)\right)=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{j}k\right)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

を確かめ，「先生！

$$\sum^{n}(\Sigma(\cdots\cdots(\Sigma k)\cdots\cdots))={}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}$$

（$r$は$\Sigma$の個数）

が成り立ちますよ!」

といって，私の所へやってきた．

思い返せば，昔私もそんな予想を抱いたような記憶があるが，彼のように挑戦してみる勇気を持たなかった．

「えー，ほんとか」と半信半疑のままその場で一緒に一般性の検討に入り，何とかそれが真であることが判明した．

翌日，彼が証明を書きあげて持ってきたものは，

$$\sum_{n_{r-1}=1}^{n_r}\left(\sum_{n_{r-2}=1}^{n_{r-1}}\left(\cdots\cdots\sum_{n_0=1}^{n_1}n_0\right)\cdots\cdots\right)\right)={}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}$$

を，$n$を固定して$r$を変化させたときと，$r$を固定して$n$を変化させたときの両方の場合について，数学的帰納法で証明したものであった．

この公式を本校の他の数学の先生に紹介し，証明を頂いたものが，後の証明１と証明３と類似のものである．そのときは公式として，彼の形のものでやって頂いたのであるが……．

後に，私も別証を考えていて，これにパスカルの三角形が隠れていることに気づき，それが興味のあることと，形がよりシンプルになることから，表題の形に整理して公式にする方がよいと気づいた次第である．

## 3. この公式の意義

$\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{n=1}^{n}n$ のような表記法にも慣れさせておけば,

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

$$\sum_{n=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が今までよりも技巧的に映らず求められるし,必要なら $k^4$, $k^5$, ……の$\sum$も自然に求めることができる.

$$\sum_{n=1}^{n}n=\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)={}_nH_2={}_{n+1}C_2=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\right)={}_nH_3={}_{n+2}C_3=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

一方

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\right)=\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}n\right)=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{n}n^2+\sum_{n=1}^{n}n\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{n}n^2=2{}_nH_3-\sum_{n=1}^{n}n$$

$$=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

同様に,$\sum k^3$については,

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\right)\right)={}_nH_4={}_{n+3}C_4$$

$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

一方

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\right)\right)=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n}(n^3+3n^2+2n)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{n}n^3+3\sum_{n=1}^{n}n^2+2\sum_{n=1}^{n}n\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{n}n^3=6{}_nH_4-3\sum_{n=1}^{n}n^2-2\sum_{n=1}^{n}n$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$-n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-2(2n+1)-4\}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

このようにして$\sum k^4$, $\sum k^5$, ……も比較的簡単に求めていくことができることがわかる.

また,4で触れるようにパスカルの三角形や二項係数との関連があるため,その証明や説明への逆の利用法も考えられることになりそうだ.

## 4. $\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)$ とパスカルの三角形

いま,碁盤目の枠の中に,次のように数を書き入れることにする.

○ 1番上の行にはすべて1を入れる.

○ 2行目以下の行は1つ上の行の左端からの累計を記入する.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | |
| | | | | | |

このように記入していくと2行目の第 $n$ 項は $\sum_{n=1}^{n}1$ が,3行目の第 $n$ 項は $\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)$が,4行目の第 $n$ 項は $\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\right)$がくることがわかる.

行の番号を最上段から 0, 1, 2, 3, ……, $r$, ……とし,列の番号を左端から 1, 2, 3, ……, $n$, ……とすると

| 行＼列 | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | …… | ($n$) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| (1) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| (2) | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | | | |
| (3) | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | | | |
| (4) | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | | | |
| ⋮ | | | | | | | | |
| ($r$) | | | | | | | ${}_ra_n$ | |
| | | | | | | | | |

$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)$ は $r$ 行目の第 $n$ 項の数 ${}_ra_n$ を求めることにほかならない

ところが,これらの数を左上隅が項点になる直角二等辺三角形の形として眺めるとパスカルの三角形になっていることがわかる.頂点は除いて,斜辺上に並ぶ数の群を上から順に第1群,第2群,第3群,……とすると,第$N$群には二項係数 ${}_NC_0$, ${}_NC_1$,

${}_N\mathrm{C}_2$, ……, ${}_N\mathrm{C}_N$が並んでいる．

${}_r a_n$は第$n+r-1$群の第$n$番目にくる二項係数であるから

$${}_r a_n={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{H}_r$$

このことをもう少し厳密に述べたのが証明6である．

## 5. 公式の証明

〈証明1〉

公式の右辺を

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r=\frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots\cdots n}{r!}$$

の形で証明する．

（補題）

$$\sum_{n=1}^{n}(k+1)\cdot(k+n-1)(k+n-2)(k+n-3)\cdots\cdots n$$
$$=(k+n)(k+n-1)(k+n-2)\cdots\cdots n$$

（証）

$$(k+1)\cdot(k+n-1)(k+n-2)(k+n-3)\cdots\cdots n$$
$$=\{(k+n)-(n-1)\}(k+n-1)(k+n-2)(k+n-3)\times\cdots\cdots n$$
$$=(k+n)(k+n-1)(k+n-2)\cdots\cdots n$$
$$-(k+n-1)(k+n-2)\cdots\cdots n(n-1)$$

この式において，$n$を1, 2, 3, ……，$n$とおき，辺々加えると

$$\sum_{n=1}^{n}(k+1)\cdot(k+n-1)(k+n-2)(k+n-3)\cdots\cdots n$$
$$=(k+n)\cdot(k+n-1)(k+n-2)\cdots\cdots n$$

(I)　$r=1$のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{n}1=n=\frac{n}{1!}$　で成立．

(II)　$r=k$のとき

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\Sigma\text{は}k\text{個}\right)$$
$$=\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots\cdots n}{k!}$$

が成り立つと仮定すると，$r=k+1$のとき

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\Sigma\text{は}k+1\text{個}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{n}\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots\cdots n}{k!}$$
$$=\frac{1}{k!}\times\frac{1}{k+1}\sum_{n=1}^{n}(k+1)(k+n-1)(k+n-2)\cdots\cdots n$$
$$=\frac{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots\cdots n}{(k+1)!}$$

よって，$r=k+1$のときも成り立つ．

(I), (II)より，すべての自然数$r$について成り立つ．

したがって，公式はすべての自然数$n$と$r$について成り立つことが証明された．

〈証明2〉

（証明1の数学的帰納法の(II)段で$r=k+1$のときの計算を補題を使わず$\Sigma$で計算したもの）

$r=k+1$のとき

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\Sigma\text{は}k+1\text{個}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{n}\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots\cdots n}{k!}$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)\cdots\cdots-(n-1)n(n+1)\cdots\cdots(n+k-1)}{(n+k)-(n-1)}$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{n=1}^{n}\{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)-(n-1)n(n+1)\cdots\cdots(n+k-1)\}$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}\left\{\sum_{n=1}^{n}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)-\sum_{n=1}^{n}(n-1)n(n+1)\cdots\cdots(n+k-1)\right\}$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}\left\{\sum_{n=1}^{n}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)-\sum_{n=0}^{n-1}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)\right\}$$
$$=\frac{1}{(k+1)!}\{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)-0\cdot1\cdot2\cdots\cdots k\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k)}{(k+1)!}$$

よって，$r=k+1$のときも成り立つ．

〈証明3〉

公式の右辺を${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$の形で証明する．

（補題）${}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}={}_r\mathrm{C}_r+{}_{r+1}\mathrm{C}_r+{}_{r+2}\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+{}_{r+n-1}\mathrm{C}_r$

（証）

相異なる$n+r$個のものを①，②，③，……，$n+r$とする．相異なる$n+r$個のものから$r+1$個の取り出し方は

①，……，$r$から$r$個取り，残る1個は$r+1$を取る場合が${}_r\mathrm{C}_r$通り，

①，……，$r+1$から$r$個取り，残る1個は$r+2$を取る場合が${}_{r+1}\mathrm{C}_r$通り，

①，……，$r+2$から$r$個取り，残る1個は$r+3$を取る場合が${}_{r+2}\mathrm{C}_r$通り，

……

①，……，$r+n-1$から$r$個取り，残る1個は$r+n$を取る場合が${}_{r+n-1}\mathrm{C}_r$通りあり，これら以外にはあり得ないから

$${}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}={}_r\mathrm{C}_r+{}_{r+1}\mathrm{C}_r+{}_{r+2}\mathrm{C}_r+\cdots\cdots+{}_{r+n-1}\mathrm{C}_r$$

(I)　$r=1$ のとき　$\sum_{n=1}^{n}1=n={}_{n}C_1$で成立する．

(II)　$r=k$ のとき

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\sum\text{は}k\text{個}\right)$$

$$={}_{n+k-1}C_k$$

が成り立つと仮定すると，$r=k+1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\sum\text{は}k+1\text{個}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{n}{}_{n+k-1}C_k$$

$$={}_{k}C_k+{}_{k+1}C_k+{}_{k+2}C_k+\cdots\cdots+{}_{k+n-1}C_k$$

$$={}_{n+k}C_{k+1}\quad(\because\text{補題})$$

ゆえに，$r=k+1$ のときも成り立つ．

(I), (II)より，全ての自然数 $r$ について成り立つ．

したがって，すべての自然数 $n$ と $r$ について公式が成り立つことが証明された．

〈証明 4〉

(補題)　${}_{n}H_{r+1}={}_{1}H_r+{}_{2}H_r+{}_{3}H_r+\cdots\cdots+{}_{n}H_r$

(証)

$n$ 種のものに番号①, ②, ③, ……, ⓝ をつける．
$n$ 種のものから重複を許して，$r+1$ 個の取り出し方は①だけで $r+1$ 個取る場合＝1 通り＝${}_{1}H_r$ 通り，
②を 1 個取り，残りの $r$ 個を①，②から取り出す場合＝${}_{2}H_r$ 通り，
③を 1 個取り，残りの $r$ 個を①，②，③から取り出す場合＝${}_{3}H_r$ 通り，
ⓝ を 1 個取り，残りの $r$ 個を①，②，……，ⓝ から取り出す場合＝${}_{n}H_r$ 通りある．したがって，
${}_{n}H_{r+1}={}_{1}H_r+{}_{2}H_r+{}_{3}H_r+\cdots\cdots+{}_{n}H_r$

(I)　$r=1$ のとき，$\sum_{n=1}^{n}1=n={}_{n}H_1$ で成り立つ．

(II)　$r=k$ のとき

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\sum\text{は}k\text{個}\right)$$

$$={}_{n}H_k$$

が成り立つと仮定すると，$r=k+1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\sum\text{は}k+1\text{個}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{n}{}_{n}H_k$$

$$={}_{1}H_k+{}_{2}H_k+{}_{3}H_k+\cdots\cdots+{}_{n}H_k$$

$$={}_{n}H_{k+1}\quad(\because\text{補題})$$

よって，$r=k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，すべての自然数 $r$ と $n$ について公式が成り立つことが証明された．

〈証明 5〉

$${}_{0}a_n=1,\ {}_{r+1}a_n=\sum_{n=1}^{n}{}_{r}a_n\ \begin{pmatrix}r=0,1,2\cdots\cdots\\n=1,2,3\cdots\cdots\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ ①$$

とおく．

$${}_{r}a_n=\sum_{n=1}^{n}{}_{r-1}a_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}{}_{r-2}a_n\right)=\cdots\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}{}_{0}a_n\right)\cdots\cdots\right)\right)$$

であるから ${}_{r}a_n={}_{n}H_r$ を示せばよい．

$${}_{r+1}a_n=\sum_{n=1}^{n}{}_{r}a_n=\sum_{n=1}^{n-1}{}_{r}a_n+{}_{r}a_n={}_{r+1}a_{n-1}+{}_{r}a_n$$

ゆえに，①は次の②で定義しても同じである．

$${}_{0}a_n=1,\ {}_{r}a_1=1,\ {}_{r+1}a_n={}_{r+1}a_{n-1}+{}_{r}a_n\ \cdots\cdots\ ②$$

一方，相異なる $n$ 種のものから，重複を許して $r+1$ 個の取り出し方は特定の一種を必ず 1 個取り，残る $r$ 個を $n$ 種の中から取り出す場合の ${}_{n}H_r$ 通りと，特定の一種を 1 個も含まない場合の ${}_{n-1}H_{r+1}$ 通りとがあるから，

$${}_{n}H_{r+1}={}_{n}H_r+{}_{n-1}H_{r+1}$$

つまり

$${}_{n}H_0=1,\ {}_{1}H_r=1,\ {}_{n}H_{r+1}={}_{n-1}H_{r+1}+{}_{n}H_r\ \cdots\cdots\ ③$$

③を漸化式とみると，②と同型であるから

$${}_{r}a_n={}_{n}H_r$$

〈証明 6〉の方針

証明 5 の②のように

$${}_{0}a_n=1,\ {}_{r}a_1=1,\ {}_{r}a_{n-1}+{}_{r-1}a_n={}_{r}a_n$$

で定義される数列$\{{}_{r}a_n\}$を $r$ 行($r=0,1,2,\cdots\cdots$)に，${}_{r}a_n$ が $r$ 行 $n$ 列($n=1,2,3,\cdots\cdots$)にくるように並べたとき，45°右上がりに並ぶ数の群がパスカルの三角形を形成することを示している．

$r$ 行 $n$ 列の群の項を ${}_{r}a_n$ と表すと

第 1 群は ${}_{1}a_1$，${}_{0}a_2$
第 2 群は ${}_{2}a_1$，${}_{1}a_2$，${}_{0}a_3$
第 3 群は ${}_{3}a_1$，${}_{2}a_2$，${}_{1}a_3$，${}_{0}a_4$
……

が並んでいる．そして，その値は第 1 群から順に，${}_{1}C_r(r=0,1)$，${}_{2}C_r(r=0,1,2)$，${}_{3}C_r(r=0,1,2,3)$，……となっている．

${}_{r}a_n$ は第 $r+n-1$ 群の第 $n$ 番目にある項であるから

$${}_{r}a_n={}_{n+r-1}C_{n-1}={}_{n+r-1}C_r$$

このことをもっと厳密に述べると次のようになる．

〈証明 6〉

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{n=1}^{n}\left(\cdots\cdots\left(\sum_{n=1}^{n}1\right)\cdots\cdots\right)\right)\quad\left(\sum\text{は}r\text{個}\right)$$

$$={}_{r}a_n$$

つまり

$${}_0a_n=1,\ {}_ra_n=\sum_{n=1}^{n}{}_{r-1}a_n\ \begin{pmatrix}r=1,2,3,\cdots\cdots\\ n=1,2,3,\cdots\cdots\end{pmatrix}$$

と定義し，${}_ra_n$を$r$行$n$列に並べる数列群を考える．

$${}_ra_n=\sum_{n=1}^{n}{}_{r-1}a_n=\sum_{n=1}^{n-1}{}_{r-1}a_n+{}_{r-1}a_n={}_ra_{n-1}+{}_{r-1}a_n$$

であるから，これらは

$$\left.\begin{array}{l}{}_ra_1=1,\ {}_0a_n=1\\ \quad(r=0,1,2,\cdots\cdots;n=1,2,3\cdots\cdots)\\ {}_ra_n={}_ra_{n-1}+{}_{r-1}a_n\quad(r\geqq1,n\geqq2)\end{array}\right\}\cdots\cdots ①$$

と定義することができる．

ここで，$n+r-1=N$(一定)となる項の群を第$N$群と名づけ，第$n$群の$n+1$個の項

$${}_{n+r-1}a_1,\ {}_{n+r-2}a_2,\ {}_{n+r-3}a_3,\ \cdots\cdots,\ {}_0a_{n+r}$$

を順にそれぞれ

$${}_N\mathrm{B}_0,\ {}_N\mathrm{B}_1,\ {}_N\mathrm{B}_2,\ \cdots\cdots,\ {}_N\mathrm{B}_N$$

と呼び換えると，${}_ra_n$は第$n$群に属し，その第$n$番目の項であるから　${}_ra_n={}_N\mathrm{B}_{n-1}$

ここで，第$n$群においては$n$は$1,2,3,\cdots\cdots$, $n+r(=N+1)$の値をとるから，$n-1=R$とおき換えると

$${}_ra_n={}_N\mathrm{B}_R\quad(R=0,1,2,\cdots\cdots,\ N)$$

したがって，　${}_ra_{n-1}={}_{N-1}\mathrm{B}_{R-1}$，${}_{r-1}a_n={}_{N-1}\mathrm{B}_R$

また，${}_ra_1=1$は${}_N\mathrm{B}_0$，${}_0a_n=1$は${}_N\mathrm{B}_N=1$と表されるから，①は

$${}_N\mathrm{B}_0=1,{}_N\mathrm{B}_N=1\quad(ただし，{}_0B_0=1)$$
$${}_N\mathrm{B}_R={}_{N-1}\mathrm{B}_{R-1}+{}_{N-1}\mathrm{B}_R$$
$$(N=1,2,3,\cdots\cdots;R=1,2,3\cdots\cdots,\ N)$$

となる．

ところが，二項係数${}_n\mathrm{C}_r$については

$${}_n\mathrm{C}_0=1,{}_n\mathrm{C}_n=1,\ {}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$$
$$(n=1,2,3,\cdots\cdots;r=1,2,3,\cdots\cdots,\ n)$$

が成り立っている．これを数列$\{{}_n\mathrm{C}_r\}$の漸化式とみると，数列$\{{}_N\mathrm{B}_R\}$と数列$\{{}_n\mathrm{C}_r\}$は全く同じものになっているから　${}_N\mathrm{B}_R={}_n\mathrm{C}_r$

したがって

$${}_ra_n={}_N\mathrm{B}_R={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{H}_r$$

(大阪府　清風南海高等学校)