第8回　日本数学コンクール

四方（しかた）　義啓（よしひろ）

今回のコンクールは「遊びの中にある数学」をテーマにしています．こう言うと，「遊びなんか」と眉をひそめる人もいるでしょうが，公式をうまく利用したり，間違えずに早く計算することだけが数学ではないのです．例えば，「星は落ちて来ないのに，リンゴはなぜ落ちる」と考えたニュートンは，このお遊びにも等しい疑問の中に近代科学を開くカギを見つけました．その上，その答たるや，ある物理の参考書にあるように『「ヨーヨー遊び」だって同じだろ』と言うのですから，驚きませんか．最近やかましく言われている「創造性」なんかも，「遊び」の兄弟分のようなものだと言えるでしょう．「何でも西洋」と言うつもりはありませんが，「リンゴ」を力学に発展させてしまった創造性，その上に微分積分学を作ってしまった馬力など，「(遊びから)学問を創造し，理論を作り出す」という点において，やっぱり日本は負けているのかもしれません.「こんなにまじめにやっているのに，どうして」と言う人もあるかもしれませんが，良く遊べないものに，良く創造するなんてことは無理かもしれないのです．というわけで，今回のコンクールになりました．

ときどき，私の言っていることはよく分からないと言われます．この文章もこれだけでは「分かったような分からないような」ということになったかも知れませんが，今回のコンクールに対する嬉しい反応を報告すれば，「ああそうだったか」と分かっていただけると思います．コンクールで出した問題に対して，毎回「ああすれば，こうすれば」という質問がきます．それはそれですごく嬉しいのですが，今回は，それに加えて，「私は遊んでいるうちにこういう疑問にぶつかった，それをこのように数学的に解決したのだがボロ博士はどう思うだろう」という手紙がまじっていたのです．ボロ博士は，「自分なりの疑問をもつこと，それを自分なりに解決してみること」，この2つこそがコンクールが求めている「未来へ向かうということ」だと思っています，と言って分かりにくければ，皆さんの中に眠っているエンジンに点火することだと思っています．ボロ博士たちは，コンクールという場で，必死になって，キーを差し込み，バッテリーをつないで火を入れようとしているのです．もし火がつけば，すなわち，自分で本物の疑問を見つけ，その解決を求め続けることができれば，21世紀は君のものなのです．

でも，恐ろしいことを言えば，皆さんの中のバッテリーが一杯にチャージされている時間はそんなに長くはないのです．ボロ博士は，だれでもが大人になる前に1度は通る反抗期は，このバッテリーが一杯になっていることを示すサインだと思っています．あの何かをやりたいのだが何をやっていいか分からないイライラした気分や，目の前の全てのものが疑わしく見えるこの時期こそ，眠っているエンジンに火をつける絶好のチャンスなのです.「今の学生の精神は死んでいる」などと，とんでもない悪口を言う人もいますが，これは，せっかくのチャンスにエンジンをかけ損ねて,「自分で目標を見つけて走れなくなってしまった」人が多いからであるような気もするのです．

問題 1

ある駅に機関車が，広島駅止まり(2という番号を付ける)，博多駅止まり(番号1とする)，大阪駅止まり(番号3とする)という行き先札の付いた3台の貨車を引っぱって入ってきました．この駅で，この貨車を，博多(1番)，広島(2番)，大阪(3番)の順につなぎ換えたいのです．ただし，この駅でできることは，

操作1)本線にある機関車が貨車を後ろ向きに押して転車台の所にいき，その向こうにある2本の支線レールの好きなほうに1台ずつ押し入れることと

操作2)転車台の向こうにある2本の支線レールにある貨車を例えばレール1(または2)にある貨車をレール1(または2)の端にある機関車を使って本線に押し出す

という操作です．この例では

イ)まず大阪をレール1に入れる(操作1)．次に博多をレール2に入れる(操作1)．次に広島をレール1に入れる(操作1)．

ロ)レール2に入っている博多を本線に押し出し(操作2)，その次にレール1に入っている広島・大阪を本線に押し出す(操作2)．

そうすれば，本線に，博多・広島・大阪と並ぶことになる．従ってこの場合は2)の操作が2回で済みます．

そこで，一般に，n 台の貨車が A_1，A_2，A_3，……，A_n という順序で入ってきたとき，これを1，2，3，……，n という順序に並べ換えるにはどうすればいいでしょう．そのとき，2)の操作をできるだけ少なくする戦略はなんですか．

解説1 本式にはフィボナッチ列に還元する方法がありますが，ここでは「戦略」としてどうするかを考えます．「戦略」とは，「実際に適用できる，細部にこだわらないうまい方法」と考えてください．まず，貨車の数だけの枚数の番号札を用意し，それを1から「順に」貨車についている番号と照合しながら先頭から末尾まで走ります．1度走るごとに照合を終わった番号札の組ができます．これを何度も繰り返すと，貨車8台なら，1から8までの番号札は1ずつ増えていく数の組に分かれます．例えば貨車が

{8, 1, 5, 7, 3, 6, 2, 4}

と並んでいれば，札は

{1, 2} {3, 4} {5, 6} {7} {8}

の6組に分かれます．そこで次の戦略を採ります：

A 同じ組の番号をもつ貨車は同じ支線に入れる(もとの貨車の並び順を守って入れる)

B 隣り合った組の番号をもつ貨車は別の支線に入れる(もとの貨車の並び順を守る)

C「1」のある方を先に本線に出す

この例で言うと，戦略A，Bによって，一方の支線は{8, 1, 5, 6, 2} もう一方の支線は{7, 3, 4} になり，戦略Cから本線の貨車は{8, 1, 5, 6, 2, 7, 3, 4}と並び換えられます．こうして並んだ貨車の番号札を改めて組分けし，それに戦略A，B，Cを繰り返して適用するのですが，その度ごとに，組の数がほぼ半分ずつになります．言い換えれば，本線への押し出し2回で組の数を半分にできます．組の数は最大で貨車の数(完全に逆順に並んでいるとき)，そしてそれが1になったとき(完全に正順に並んでいるとき)に終了ですから，この戦略によって貨車の数の対数回の並べ換えでほぼ完成ということが証明できます．

問題 2

「回っているコマはなぜ倒れないのかな」などと考えだすと眠れないほどコマは不思議です．その上，逆立ちするコマがあるなどと言われると「ほんとに，ほんとかな」と思うでしょう．実は，逆立ちコマは，仕掛けを知ってしまうと簡単に作れるのです．というわけで，まず，用意してある逆立ちコマの仕掛けを見破って，逆立ちコマを作ってみて欲しいのです．それから，それを数理的に解明して欲しいのです．もし，君の作ったコマが逆立ちをしなかったら，それが逆立ちをしない理由を数理的に明らかにしてくれてもいいですよ．

解説2 コマを観察していると，コマが逆立ちをするときや回っているときには，次のような逆立ちのステップ1，2，3，4と1つの共通性質Aがあることが分かります：

1 最初にコマはブレ始め，そのブレはドンドン大きくなっていく．
2 次に，コマの軸はほぼ水平になるが，このときある点を通過するかどうかが問題になる．
3 それを越えれば，更にコマの軸は下の方に傾いていく．
4 最後に，その軸が床に触れ，今度はそれを中心に回転し始める．

A コマの共通性質「コマはその重心と床との距離をできるだけ大きくしようとしている」

これからコマが逆立ちをするための条件を考えることができます．もし，コマの重心がコマが床に触れている点に立てた垂線の上にあれば，その距離は最大になっているので，性質Aからコマはブレなくてすみます．ですから，状況1になる条件として，「コマの底は丸まっていて，重心はある程度上にあるはず」が得られます．これは，木のボールに軸を取り付けたコマが満たします．何の加工もしないとこの木のボールのコマのほとんどは逆立ちせず，そこで状況2が問題になります．ここでも性質Aが大事になります．コマが水平になったときに，その重心がちょうど床からの垂線の上にきてしまったら，コマはそれ以上にブレなくなるからです．そこで，この状況になったときにも重心が垂線からズレるようにボールを削っておく必要があったのです．

逆立ちの問題は，重さが一様な木のボールの場合はこのように形の問題として解決できます．また粘土をうまくくっつけても(難しいけれど)逆立ちは実現できます．

問題3

ダルマ落としと言うゲームがあります．これは，いくつか積んである円盤の一番上にダルマを置いておき，ダルマを落とさずに円盤をたたいて抜こうというものです．普通はたたきやすい一番下の段の円盤をたたいて抜くのですが，もしどの円盤でも同じようにたたけるとしたら，どこからたたくのが一番いいでしょう，そしてそれはなぜでしょう．ひとつダルマ落としの戦略を数理的に立ててみてください．ボロ博士は円盤の積んである形は変形することによってエネルギーを吸収するから，変形しやすいように中央あたりをたたくといいと言っていますがほんとうでしょうか．

解説3 ダルマ落としは慣性の説明によく使われますが，現実のダルマ落としは，摩擦などのために慣性だけでは動いていません．そこで，ダルマは十分重い，床と一番下の円盤との摩擦は大きい，円盤同士にもある程度の摩擦が働くなどとして，現実的な状況を抜き出してみることにします：

1 ダルマと床，すなわち系の一番上と下は動かない．
2 どれかの円盤をたたき抜くとき，残った円盤の変位は，たたき抜かれた円盤からの距離が大きいほど小さい．
3 真ん中から上のどれかの円盤をたたいて抜いたときに残る形は，真ん中からちょうど同じだけ下にいった円盤を抜くときと，ほぼ同じになる．

この観察から，これは割り箸を両端で支えた状態と同じだと大島中ボロ博士が言っていました．この問題の眼目は，一定のたたき抜くエネルギーに対して，残った円盤の「形の変位」をできるだけ小さくすればいい，ということになります．すると観察2, 3 (と変位が摩擦エネルギーの吸収によっているということ)から，たたき抜く円盤から各円盤までの「(エネルギー的な)平均距離」をできるだけ小さくすればいいことになるでしょう．そこで，例えば

$$(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2$$

を最小にする t が x，y，z の平均であることからも分かるように，普通は真ん中をたたけばいいということになるわけです，この結論は割り箸との類似性を利用しても導かれます．

問題 4

テレビでは見てはいけない場面になるとモザイクがかかることがあります．ですが，ある人はうまくするとモザイクが消えてもとの絵が分かると言っていました．モザイクが消えるなんてほんとうでしょうか，もし消えるとすると，どうやればいいのでしょう．モザイクをかける装置を用意しましたので，この装置でどうしてモザイクがかかるのか，そして，それがどうして消えるのか，または消えないのかを数理的に明らかにしてくれませんか．なお，ボロ博士は，この問題は複眼を持つ昆虫が目玉をキョロキョロ動かしているのと似ているのではないかと言って，次の問題 5 を用意しています．もし必要なら参考にしてください．

問題 5

未知数 X に関する方程式を 1 つ立てるには，未知数 X に関する情報が 1 つ必要です．例えば，「X を 2 乗すれば，もとの X の 2 倍になる」などは情報です．これを方程式に直すと，未知数 X が求まります．「X が 2 または 0 である」というのも 1 つの情報ですから，これを言い換えると，「1 つの情報はちょうど 1 つの情報に置き換えられる」ということになります．まず，連立 1 次方程式の場合にこれがどうなっているかを考えてみてくれませんか．うっかりすると，にせ情報や，同じ情報を 2 度 3 度つかまされる場合もありそうですが，それはどうやって見分けたらいいでしょう．そして，モザイク装置では情報の数（かず）はどうなるのか考えてみてください，それをキョロキョロ動かすと情報の数（かず）はもとに戻るでしょうか，にせものはつかまされないでしょうか．

解説 4&5　これら 2 つの問題は，もともとは 1 つのものだったのを，2 つに分けたと言う方が分かりやすいかも知れません．分けた理由は，この問題が結構欲張っていて，

1 モザイク作りにおける部分部分の平均化とその原理
2 それを復元する場合の移動平均とその原理
3 それが昆虫などの視覚認識に使われているらしいこと
4 これらのすべてにある特別な連立 1 次方程式の理論が関係すること

などを見ていただこうとしていたからなのです．実はこのモザイク装置で見ているのはお隣同士を平均化してしまった，いわば荒っぽい・少ない情報なのです．それを元に戻す早道が，それを少しずつズラせて改めて平均化するという手法・移動平均であり，それは昆虫の複眼などで行われている処理らしいのです．例えば，a，b，c，d，e，f と並んだデータのお隣同士を平均すると，

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{c+d}{2},\quad \frac{e+f}{2}$$

が得られます．これを 1 つ右にずらせると，

$$a\ ,\quad \frac{b+c}{2},\quad \frac{d+e}{2},\quad f$$

が得られるわけです．すると問題は，これらのデータから，元のデータ a，b，c，d，e，f を求められるかということになります．これこそ，学校で習う 1 次方程式の醍醐味ではなかったでしょうか，というわけで，この問題は高校数学ハイライトのつもりだったのです．

（元 名古屋大学大学院多元数理科学研究所）