’90 年東京工業大学（後期）の入試問題について

柳田（やなぎだ） 五夫（いつお）

1．はじめに

数研通信 No.21「大学入試の背景を探る」, No.22「’94年入試の良問の背景を探る」で宮川先生は’90年東京工業大学（後期）の入試問題

> 1 n を 2 以上の整数とする．
> (1) $n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ で，すべての実数 θ に対して，
> $$\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)$$
> $$\cos(2n\theta)=Q_n(\sin^2\theta)$$
> を満たすものが存在することを帰納法を用いて示せ．
> (2) $k=1,2,\cdots\cdots,\ n-1$ に対して
> $$\alpha_k=\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^{-2} \text{とおくと}$$
> $$P_n(x)=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$$
> となることを示せ．
> (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=\frac{2n^2-2}{3}$ を示せ．〔90 東京工大〕

の背景を探られていますが，$P_n(x)$ の一般形，そして他の背景についても探ってみたい．

2．$P_n(x)$ の一般形について

$n-1$ 次多項式 $P_n(x)$ を

$P_n(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$

の形で表すのは困難であるが，他の形式ならば一般形を求めることができる．

> **補題**　m を自然数とするとき，
> $$\cos m\theta=\sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^r{}_m\mathrm{C}_{2r}\cos^{m-2r}\theta\sin^{2r}\theta \quad\cdots\cdots①$$
> $$\sin m\theta=\sum_{r=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^r{}_m\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{m-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta \quad\cdots\cdots②$$

［証明］　$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\displaystyle\sum_{r=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_r\cos^{m-r}\theta i^r\sin^r\theta$

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}{}_m\mathrm{C}_{2r}\cos^{m-2r}\theta i^{2r}\sin^{2r}\theta$$

$$+\sum_{r=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}{}_m\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{m-2r-1}\theta i^{2r+1}\sin^{2r+1}\theta$$

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^r{}_m\mathrm{C}_{2r}\cos^{m-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$

$$+i\sum_{r=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(-1)^r{}_m\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{m-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

一方，$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$ となるから，実数部，虚数部を比較して①，②を得る．

②で $m=2n$ のとき

$$\sin2n\theta=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{2n}\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{2n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

$$=\cos\theta\sin\theta\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{2n}\mathrm{C}_{2r+1}(\cos^2\theta)^{n-r-1}(\sin^2\theta)^r \quad\cdots\cdots③$$

$$=\sin2\theta\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{2n}\mathrm{C}_{2r+1}(1-\sin^2\theta)^{n-r-1}(\sin^2\theta)^r$$

$(=\sin2\theta\cdot n\cdot P_n(\sin^2\theta))$

となるから

$$P_n(x)=\frac{1}{2n}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{2n}\mathrm{C}_{2r+1}(1-x)^{n-r-1}x^r \quad\cdots④$$

とおくと $P_n(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式である．

$P_n(x)$ の x^{n-1} の係数は

$$\frac{1}{2n}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{2n}\mathrm{C}_{2r+1}(-1)^{n-r-1}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\sum_{r=0}^{n-1}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r+1}=\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k}{2}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\cdot\frac{2^{2n}}{2}=\frac{(-4)^{n-1}}{n}\neq0$$

となるから，$n-1$ 次多項式である．

また，$\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)$ を満たす $n-1$ 次多項式は④以外にはないことが容易に分かる．

同様にして，

$$Q_n(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}(1-x)^{n-r}x^r \quad\cdots\cdots⑤$$

となることが分かる．

［注］$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ となる多項式 $T_n(x)$［’94年東北大学（前期）6 番の $P_n(x)$（［2］参照）］について

$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r{}_nC_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$
$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_nC_{2r}(\cos\theta)^{n-2r}(\cos^2\theta-1)^r$$
より$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$となる多項式
$$T_n(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_nC_{2r}x^{n-2r}(x^2-1)^r$$
はチェビシェフの多項式である．([3]参照)

'90 年東京工業大学(後期)の入試問題 $\boxed{1}$ の類題が '91 年に東京大学で出題されている．

> $\boxed{2}$ (1) 自然数 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ に対してある多項式 $p_n(x)$，$q_n(x)$ が存在して，
> $\sin n\theta=p_n(\tan\theta)\cos^n\theta$，$\cos n\theta=q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$ と書けることを示せ．
> (2) このとき，$n>1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ．
> $p_n'(x)=nq_{n-1}(x)$，$q_n'(x)=-np_{n-1}(x)$
> 〔91 東京大〕

[解説](1) ②から
$$\sin n\theta=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^r{}_nC_{2r+1}\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$
$$=\cos^n\theta\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^r{}_nC_{2r+1}\tan^{2r+1}\theta$$
$$=\cos^n\theta\, p_n(\tan\theta)$$
$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r{}_nC_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$
$$=\cos^n\theta\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r{}_nC_{2r}\tan^{2r}\theta$$
$$=\cos^n\theta\, q_n(\tan\theta)$$
となる．ただし，
$$p_n(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^r{}_nC_{2r+1}x^{2r+1}$$
$$q_n(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r{}_nC_{2r}x^{2r}$$ とする．□

$\boxed{2}$ (1)から多項式 $p_n(x)$，$q_n(x)$ が存在して，
$\sin n\theta=p_n(\tan\theta)\cos^n\theta$，$\cos n\theta=q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$
と書ける．これを用いると
$$\tan n\theta=\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}=\frac{p_n(\tan\theta)}{q_n(\tan\theta)}$$
と表される．この結果は'92年に静岡大学・理(数)で出題されている．

> $\boxed{3}$ 自然数 n に対して，$\tan x$ の n 倍角の公式を導きたい．そこで $t=\tan x$ とおくとき，$\tan nx$ は t に関する n 次以下の多項式 $p_n(t)$ と $q_n(t)$ (ただし，$p_n(0)=1$) によって，$\tan nx=\dfrac{q_n(t)}{p_n(t)}$ と表されることを確かめよう．
> $n=1$ のとき，$\tan x=\dfrac{t}{1}$ であるから，
> $p_1(t)=1, q_1(t)=t$ であり，$n=2$ のときは，
> $\tan 2x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ より $p_2(t)=1-t^2$, $q_2(t)=2t$ である．
> これらは二項係数 ${}_nC_k$ を用いて，$p_1(t)={}_1C_0$，
> $q_1(t)={}_1C_1t, p_2(t)={}_2C_0-{}_2C_2t^2$ および
> $q_2(t)={}_2C_1t$ と表されることに注意して，次の問いに答えよ．
> (1) $n=3,4,5$ のとき $p_n(t)$，$q_n(t)$ を求めよ．
> (2) 一般の n について $p_n(t)$，$q_n(t)$ の具体的な形を予想し，その正しいことを証明せよ．
> 〔92 静岡大〕

次の問題は$\boxed{1}$ (1)の結果からも証明できる．

> $\boxed{4}$ n が正の整数のとき，$\cos 2n\theta$ は $\sin\theta$ の多項式で表され，$\sin 2n\theta$ は $\sin\theta$ の多項式に $\cos\theta$ を掛けた形で表されることを示せ．〔92 図書館情報大〕

$\boxed{1}$は $\cos mx, \sin mx$ で m が偶数のときであるが，奇数のときは②から
$\sin(2n-1)x$
$$=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{2n-1}C_{2r+1}\cos^{2n-1-2r-1}x\sin^{2r+1}x$$
$$=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{2n-1}C_{2r+1}(1-\sin^2x)^{n-r-1}\sin^{2r+1}x$$
また，[注]から $\cos(2n-1)x=T_{2n-1}(\cos x)$ となる．
この結果は '93年に筑波大学で出題されている．

> $\boxed{5}$ n を自然数とするとき，$\sin(2n-1)x$ は $\sin x$ の多項式で表され，$\cos(2n-1)x$ は $\cos x$ の多項式で表されることを証明せよ．〔93 筑波大〕

チェビシェフの多項式 $T_n(x)$ に関する問題は '94 年に東北大学，'95 年に山梨医科大学，熊本大学で出題されている．チェビシェフの多項式 $g_n(x)$ (定義については[3]参照)に関する問題は '94 年に富山医科薬科大学，'95年にお茶の水女子大学で出題されている．

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の値について

[$\boxed{1}$ (3)の証明]③から$\sin 2n\theta$
$=\cos\theta\sin\theta\,\{{}_{2n}C_1\cos^{2n-2}\theta-{}_{2n}C_3\cos^{2n-4}\theta\sin^2\theta$
$+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_{2n}C_{2n-1}\sin^{2n-2}\theta\}$

$\theta=\dfrac{\pi}{2n}$, $\dfrac{2\pi}{2n}$, ……, $\dfrac{(n-1)\pi}{2n}$ のとき $\sin 2n\theta=0$, $\cos\theta\sin\theta\neq 0$ であるから，方程式

$${}_{2n}C_1\cos^{2n-2}\theta-{}_{2n}C_3\cos^{2n-4}\theta\sin^2\theta$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_{2n}C_{2n-1}\sin^{2n-2}\theta=0$$

の両辺を $\sin^{2n-2}\theta\ (\neq 0)$ で割ると

$${}_{2n}C_1\cot^{2n-2}\theta-{}_{2n}C_3\cot^{2n-4}\theta$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_{2n}C_{2n-1}=0$$

したがって，$n-1$ 次方程式

$${}_{2n}C_1x^{n-1}-{}_{2n}C_3x^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_{2n}C_{2n-1}=0 \cdots\cdots ⑥$$

の解は$\cot^2\dfrac{\pi}{2n}$, $\cot^2\dfrac{2\pi}{2n}$, …, $\cot^2\dfrac{(n-1)\pi}{2n}$ となり，解と係数の関係から

$$\cot^2\frac{\pi}{2n}+\cot^2\frac{2\pi}{2n}+\cdots\cdots+\cot^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$$
$$=\frac{{}_{2n}C_3}{{}_{2n}C_1}=\frac{(n-1)(2n-1)}{3} \cdots\cdots ⑦$$

$\mathrm{cosec}^2\theta=\cot^2\theta+1$ を用いると

$$\mathrm{cosec}^2\frac{\pi}{2n}+\mathrm{cosec}^2\frac{2\pi}{2n}+\cdots\cdots+\mathrm{cosec}^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$$
$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{3}+(n-1)$$
$$=\frac{2n^2-2}{3} \cdots\cdots ⑧ \quad \square$$

1 (3)の結果を用いると $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の値が求められる．([4]参照)

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ より

$\cot^2\theta<\dfrac{1}{\theta^2}<\mathrm{cosec}^2\theta$ が成り立つから，

$\theta=\dfrac{k\pi}{2n}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ とおいて辺々を加えると

$$\cot^2\frac{\pi}{2n}+\cot^2\frac{2\pi}{2n}+\cdots\cdots+\cot^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$$
$$<\frac{4n^2}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right\}$$
$$<\mathrm{cosec}^2\frac{\pi}{2n}+\mathrm{cosec}^2\frac{2\pi}{2n}+\cdots\cdots+\mathrm{cosec}^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

⑦，⑧から

$$\frac{\pi^2(n-1)(2n-1)}{12n^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}$$
$$<\frac{\pi^2(n^2-1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2(n-1)(2n-1)}{12n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2(n^2-1)}{6n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

次に，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ の値を同様にして求めてみる．

$\beta_k=\cot^2\dfrac{k\pi}{2n}$ とおくとβ_1, β_2, ……, β_{n-1} は⑥の解であるから

$$\sum_{i<j}\beta_i\beta_j=\frac{{}_{2n}C_5}{{}_{2n}C_1}=\frac{(2n-1)(n-1)(2n-3)(n-2)}{30}$$

よって

$$\cot^4\frac{\pi}{2n}+\cot^4\frac{2\pi}{2n}+\cdots\cdots+\cot^4\frac{(n-1)\pi}{2n}$$
$$=\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\cdots\cdots+\beta_{n-1}{}^2$$
$$=(\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_{n-1})^2-2\sum_{i<j}\beta_i\beta_j$$
$$=\frac{(n-1)^2(2n-1)^2}{9}-\frac{(2n-1)(n-1)(2n-3)(n-2)}{15}$$
$$=\frac{(2n-1)(n-1)(4n^2+6n-13)}{45} \cdots\cdots ⑨$$

$\mathrm{cosec}^4\theta=(\cot^2\theta+1)^2=\cot^4\theta+2\cot^2\theta+1$を用いると

$$\mathrm{cosec}^4\frac{\pi}{2n}+\mathrm{cosec}^4\frac{2\pi}{2n}+\cdots\cdots+\mathrm{cosec}^4\frac{(n-1)\pi}{2n}$$
$$=\frac{(2n-1)(n-1)(4n^2+6n-13)}{45}$$
$$+2\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{3}+(n-1)$$
$$=\frac{4(n-1)(n+1)(2n^2+7)}{45} \cdots\cdots ⑩$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $\cot^4\theta<\dfrac{1}{\theta^4}<\mathrm{cosec}^4\theta$ が成り立つから，

$\theta=\dfrac{k\pi}{2n}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ とおいて辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot^4\frac{k\pi}{2n}<\frac{16n^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^4}<\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{cosec}^4\frac{k\pi}{2n}$$

⑨，⑩から

$$\frac{\pi^4(n-1)(2n-1)(4n^2+6n-13)}{45\cdot 16\cdot n^4}$$
$$<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^4}<\frac{\pi^4(n-1)(n+1)(2n^2+7)}{45\cdot 4\cdot n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^4(n-1)(2n-1)(4n^2+6n-13)}{45\cdot 16\cdot n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^4(n-1)(n+1)(2n^2+7)}{45\cdot 4\cdot n^4}$$
$$=\frac{\pi^4}{90}$$

であるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

4. おわりに

□1の類題が'89年に上智大学・理工学部(数・物・化)で出題されている.

[6] (1) i を虚数単位とする. n を自然数とすると
$(\cos nx+i\sin nx)(\cos x+i\sin x)=[A]+i[B]$
となる. したがって, 数学的帰納法により
$\cos nx+i\sin nx=([C]+i[D])^n\ (n=1,2,\cdots\cdots)$
が成り立つ. $n=5$ とおいて二項定理を用いると
$\sin 5x$
$=[チ]\cos^4 x\sin x+[ツ]\cos^2 x\sin^3 x+[テ]\sin^5 x$
$=\sin^5 x([チ]\cot^4 x+[ツ]\cot^2 x+[テ])$
が得られる.
(2) m を自然数とすると
$\sin(2m+1)x=\sin^{2m+1}xP_m(\cot^2 x)$ となる
m 次多項式
$P_m(x)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}z+a_m$
はただ1つ定まる. このとき
$a_0=[ト]m+[ナ]$, $a_1=\dfrac{[ニ]}{[ヌ]}m^3+\dfrac{[ネ]}{[ノ]}m$ となる.
(3) (2)の多項式 $P_m(z)$ に対し, 方程式 $P_m(z)=0$ の m 個の相違なる根が
$z=\cot^2\dfrac{k\pi}{am+b}$, $k=1,2,\cdots\cdots,m$ となるように自然数 a,b を定める.
$a\geqq b>0$ とすれば $a=[ハ]$, $b=[ヒ]$ となる.
この a,b に対して
$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\pi}{am+b}\right)=\frac{[フ]}{[ヘ]}m^2+\frac{[ホ]}{[マ]}m$$
が成り立つ.
$[A]\sim[B]$ に対する選択肢
① $\sin x$　② $\cos x$　③ $\sin(n-1)x$
④ $\cos(n-1)x$　⑤ $\sin nx$　⑥ $\cos nx$
⑦ $\sin(n+1)x$　⑧ $\cos(n+1)x$

参考文献

[1]宮川　幸隆, 大学入試の背景を探る
数研通信No.21
[2]宮川　幸隆, '94年入試の良問の背景を探る
数研通信No.22
[3]柳田　五夫, チェビチェフの多項式について
数研通信No.17
[4]大塚　美紀夫, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の値について
駿台フォーラム第12号

(栃木県立栃木高等学校)