ニュートン法について

高橋(たかはし)　信博(のぶひろ)

1．研究のねらい・はじめに

新学習指導要領では数学Ｃの中でニュートン法が教材として取り上げられている．数値解析や微分方程式等において構成的な方法として有効な手段である．ここでは余り知られていない故占部実教授によって開発されたウラベ方法を高校の教材として利用できる形で紹介することを目的とする．この定理の特色は方程式の近似解が何等の方法で得られたとき，その解の周りに真の解(厳密解)がある範囲内に唯一つ解が存在することを保証するものである．証明方法は修正ニュートン法を使い，誤差解析を行うものである．大学入試問題において，ニュートン法もしくは反復法(非線形の漸化式)に関するもの，あるいはそこらに発想を求めたものは多い．

2．研究の内容・方法

以下ウラベの定理を１変数の場合にして述べる．

定理　区間 $I=[a,\ b]$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が連続微分可能なとき，方程式

(1)　$f(x)=0$

を考えよう．いま，何らかの方法で(1)の近似解 $\hat{x}$ が与えられ，これについて $f'(\hat{x})\neq 0$ とする．
更に近似解 $\hat{x}$ に関して，次の条件(i)～(iii)を満たす正数 δ と非負の数 $\kappa\,(0\leqq\kappa<1)$ とが存在すると仮定する．

(2) $\begin{cases} \text{(i)}\quad \Omega_\delta=\{x\,;\,|x-\hat{x}|\leqq\delta\}\subset\Omega, \\ \text{(ii)}\quad |f(x)-f'(x)|\leqq\dfrac{\kappa}{M}, \\ \text{(iii)}\quad \dfrac{Mr}{1-\kappa}\leqq\delta\,. \end{cases}$

ただし

(3) $|f(\hat{x})|\leqq r,\quad \dfrac{1}{|f'(\hat{x})|}\leqq M.$

このとき，Ω_δ において１つただ１つの厳密解 α が存在して，$f'(\alpha)\neq 0$ であり,しかも近似解 $\hat{x}$ の誤差評価

(4)　$|\hat{x}-\alpha|\leqq\dfrac{Mr}{1-\kappa}$

が成り立つ．

次に証明の概略を述べよう．

$C=\dfrac{1}{f'(\hat{x})}$ とおきニュートンの反復法

(5) $x_{n+1}=x_n-Cf(x_n)\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots),$
　$x_0=\hat{x}$

を考えよう．この反復法が Ω_δ において *welldefined* であること，すなわちこの反復計算が Ω_δ において限りなく実行可能であることをまず証明しよう．そのためには

(6) $|x_{n+1}-x_n|\leqq\kappa^n|x_1-x_0|,$

(7) $x_{n+1}\in\Omega_\delta\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

を証明すればよい．これらを数学的帰納法を用いて証明しよう．

$n=0$ のとき，(6)は明らかに成り立つ．また

(8) $|x_1-x_0|=|Cf(x_0)|\leqq Mr\leqq(1-\kappa)\delta\leqq\delta$

が成り立つから $x_1\in\Omega_\delta$ である．このことは，$n=0$ のとき，(7)が成り立つことを示している．

$n-1$ まで(6)および(7)が成り立つと仮定しよう．

$x_{n+1}-x_n=x_n-x_{n-1}-C[f(x_n)-f(x_{n-1})]$

$=C\displaystyle\int_0^1\{f'(x_0)-f'[x_{n-1}+\theta(x_n-x_{n-1})]\}(x_n-x_{n-1})d\theta.$

仮定から x_{n-1} および x_n は Ω_δ に属するから，

$x_{n-1}+\theta(x_n-x_{n-1})\in\Omega_\delta\ (0\leqq\theta\leqq1).$

したがって，(2)の(ii)から

(9) $|x_{n+1}-x_n|\leqq M\cdot\dfrac{\kappa}{M}|x_n-x_{n-1}|=\kappa|x_n-x_{n-1}|$

が成り立つ，数学帰納法の仮定から，(6)を用いて

(10) $|x_n-x_{n-1}|\leqq\kappa^{n-1}|x_1-x_0|$

を得る．(9)および(10)から

$$|x_{n+1}-x_n|\leqq\kappa^n|x_1-x_0|$$

が成り立つ．すなわち(6)は n のときも成り立つことが証明された．

$|x_{n+1}-x_0| \leqq |x_{n+1}-x_n|+|x_n-x_{n-1}|+\cdots\cdots+|x_1--x_0|$
が成り立つので(6), (8)から

(11) $|x_{n+1}-x_0| \leqq (\kappa^n+\kappa^{n-1}+\cdots\cdots+\kappa+1)|x_1-x_0|$

$$\leqq \frac{1}{1-\kappa}|Cf(x_0)| \leqq \frac{Mr}{1-\kappa} \leqq \delta.$$

すなわち $x_{n+1} \in \Omega_\delta$
これで(7)が n のときも成り立つことが証明された.
これで反復法(5)は Ω_δ において限りなく実行可能なことが証明されたので，無限列 $\{x_n\}$ が生じ，$|\kappa|<1$であるから(6)により無限列 $\{x_n\}$ が生じ，$|\kappa|<1$であるから(6)により $\{x_n\}$ は有界閉区間 Ω_δ で収束する.
この極限値を $\alpha \in \Omega_\delta$ とおく.
$\alpha=\lim_{n\to\infty} x_n$. $f(x)$の連続性から α は(1)の解である.
したがって，(11)から不等式(4)が導かれる.

次に，$f'(\alpha) \fallingdotseq 0$を証明しよう.

$$f'(\alpha)=f'(\hat{x})+\{f'(\alpha)-f'(\hat{x})\}$$
$$=f'(\hat{x})+\{1+f'^{-1}(\hat{x})[f'(\alpha)-f'(\hat{x})]\}$$

(2)の(ii)から

$$|f'^{-1}(\hat{x})[f'(\alpha)-f'(\hat{x})]| \leqq M.\frac{\kappa}{M}=\kappa<1$$

したがって，無限等比級数の和が存在するから

$$\frac{1}{1+f'^{-1}(\hat{x})[f'(\alpha)-f'(\hat{x})]}$$

は存在する．ゆえに$\frac{1}{f'(\alpha)}$は存在し，$f'(\alpha) \fallingdotseq 0$
が成り立つ.

最後に，Ω_δ における解の一意性を証明しよう.
α とは別の解 β が存在したとしよう．すると

$$\alpha=\alpha-Cf(\alpha),\ \beta=\beta-Cf(\beta)$$

と書ける．したがって(9)と同様に

$$|\alpha-\beta| \leqq \kappa|\alpha-\beta|$$

を得る．$0 \leqq \kappa<1$ であるから $\alpha=\beta$
これですべて証明された.

[注意] 条件(ii), (iii)は，次の条件でおきかえることができる.
(ii)′ $|1-f'^{-1}(\hat{x})f'(x)| \leqq \kappa$ (すべての $x \in \Omega_\delta$)について
(iii)′ $r(1-\kappa)^{-1} \leqq \delta$
ここで，r は不等式 $|f'^{-1}(\hat{x})f(x)| \leqq r$ 満たすものとする．このとき誤差評価(4)は，もっと精密なもの
(4)′ $|\hat{x}-\alpha| \leqq r(1-\kappa)^{-1}$
となる.

次に，ある教科書Cに載っている問題を取り上げてみる.

問題　ニュートン法を用いて，方程式

$$x^3+x^2-2x-1=0$$

の3に近い解を求めよ.

このときのニュートンは

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+x_n^2-2x_n-1}{3x_n^2+2x_n-2}$$

となる．このニュートンを用いて表計算ソフトで計算すると $p.19$ の通りである.
$\boxed{\text{例}}$ 3次方程式

(12) $f(x)=x^3+x^2-2x-1=0$

の1つの近似解

$$x_0=1.246979603717467$$

が与えたとき，この近似解の誤差をウラベの定理によって評価せよ.
[解] $f'(x)=3x^2+2x-2$ であるから

$$f(x)-f'(x_0)=3x^2+2x-3.158837604$$

を得る．x_0 の残差は $f(x_0)=6.66134\times10^{-16}$
である．さて，近似解 x_0 の δ 近傍

$\Omega_\delta=\{x;|x-x_0| \leqq \delta\}$

において，$f''(x)=6x+2$ と平均値の定理を用いて
$|f'(x)-f'(x_0)| \leqq K|x-x_0| \leqq 20\delta$
を得る．ここに，$K=\max_{0\leqq s\leqq 3}|f''(s)|=20$
また，$\frac{1}{|f'(x_0)|}=0.193842266841744$
が得られるから，ウラベの定理において
$M=0.193842266841744$ および $r=6.66134\times10^{-16}$
このとき，(ii)と(iii)とより，次の不等式を満たす $\delta>0$ と $0 \leqq \kappa<1$とが存在するかどうかを吟味しよう.

$$\begin{cases} 20\delta \leqq \dfrac{\kappa}{M}=5.15833\kappa, \\ \dfrac{1}{1-\kappa}\times0.193842\times6.66134\times10^{-16} \leqq \delta \end{cases}$$

これを書きかえると

$$\begin{cases} \delta \leqq \dfrac{5.15833}{20}\kappa=2.579416\cdots\cdots\times10^{-1}\kappa, \\ \dfrac{1}{1-\kappa}\times1.29125\times10^{-16} \leqq \delta \end{cases}$$

となる．これらの2式を1つの不等式にまとめると

$$\frac{1}{1-\kappa}\times1.29125\times10^{-16} \leqq \delta \leqq 2.579416\cdots\cdots\times10^{-1}\kappa$$

となる．ここで$1-\kappa>0$ であるから，κ に関する2

次不等式

$1.29125 \times 10^{-16} \leqq 2.579416 \cdots\cdots \times 10^{-1} \kappa\ (1-\kappa)$

を解いて，$3.697117 \times 10^{-17} \leqq \kappa \leqq 0.066533910 \cdots\cdots$ を得る．$\kappa = 3.697117 \times 10^{-17}$ を選ぶと，δ の下限と上限とは次のようになる．

$$9.53640699 \times 10^{-18} \leqq \delta \leqq 1.291249 \times 10^{-16}$$

ゆえに，$\delta = 1.291249 \times 10^{-16}$ を選べば，確かに(ii)と(iii)とは成り立つ，このとき

$$\frac{Mr}{1-\kappa} = \frac{1}{1-\kappa} \times 1.29125 \times 10^{-16} = 1.29124889 \times 10^{-16}$$

したがって(4)から，求める誤差評価は

$$|\alpha - x_0| \leqq 1.29124889 \times 10^{-16}$$

3．研究のまとめ・考察

高校の教材として取り上げるときの最大の問題は上記の証明を見て分かるように実数の完備性を使っていることである．ここらをどの様にして直感的でもよいからクリアするかである．次にたくさんの例を通して，この定理の良さを体験させることである．また，多く大学入試問題の漸化式に関する問題を調べてみたい．

〈参考文献〉

[1] 篠原能材，数値解析の基礎，日新出版，1978.

[2] M. Urabe, *Galerkin's procedure for nonlinear periodic system*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 20(1965), *pp*120–152.

（神奈川県立生田高等学校）

ニュートン法

反復回数 n	x [n]	x [n]	x [n]
1	3.00000000	0.00000000	−2.000000000000000
2	2.064516129032260	−0.500000000000000	−1.833333333333330
3	1.532685551530090	−0.444444444444445	−1.802935010482180
4	1.300430830506370	−0.445041816009558	−1.801938793202220
5	1.249420545207190	−0.445041867912629	−1.801937735806030
6	1.246985060403620	−0.445041867912629	−1.801937735804840
7	1.246979603744830	−0.445041867912629	−1.801937735804840
8	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
9	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
10	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
11	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
12	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
13	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
14	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
15	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
16	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
17	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
18	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
19	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
20	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
21	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
22	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
23	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
24	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
25	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
26	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
27	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
28	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
29	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
30	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
31	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
32	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
33	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
34	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
35	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
36	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
37	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
38	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
39	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
40	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
41	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
42	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
43	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
44	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
45	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
46	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
47	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
48	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
49	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
50	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
51	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
52	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
53	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
54	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
55	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
56	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
57	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840
58	1.246979603717470	−0.445041867912629	−1.801937735804840