$x^2+y^2=z^2$ の自然数解

井上（いのうえ）　鴻三（こうぞう）

はじめに

最近，数学嫌いの若者が増えているが，知識の押し付けでなく，いろんなことに関心をもち，問題にじっくり取組み，自由に考えられるような，教育をも含めた社会環境になって欲しい．そんなことを思いながらペンを進める．

これから用いる文字 a，b，c，…… はすべて整数である．また，次の記号は

$(a,\ c)$　　　a，c の最大公約数

$(a,\ c)=1$　　a，c は互いに素

であることを示す．

計算公式

(1) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(4) $(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$

これらの式を利用して

$$x^2+y^2=z^2$$

の解を求める．

1 $x^2=a^2\pm 2ab$ の解

$$x^2=a^2\pm 2ab=a(a\pm 2b)$$

において

$$(1)\quad \begin{aligned} a&=l^2\\ a\pm 2b&=k^2 \end{aligned}$$

とおき

$$x^2=a^2\pm 2ab=k^2l^2$$

$$y=\pm b=\frac{k^2-l^2}{2}$$

$$z=a\pm b=\frac{k^2+l^2}{2}$$

この式を，公式(1)に代入して

$$(2)\ k^2l^2+\left(\frac{k^2-l^2}{2}\right)^2=\left(\frac{k^2+l^2}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ x^2+y^2=z^2$$

となる．次に

$$(3)\quad \begin{aligned} a&=2l^2\\ a\pm 2b&=2k^2 \end{aligned}$$

とおくと

$$x^2=a^2\pm 2ab=4k^2l^2$$

$$y=\pm b=k^2-l^2$$

$$z=a\pm b=k^2+l^2$$

(4) $4k^2l^2+(k^2-l^2)^2=(k^2+l^2)^2$

$$\therefore\ x^2+y^2=z^2$$

となる．(2)，(4) は同じ内容の式であることを次表で示す．

表 1

(2) $x=kl$

$$y=\frac{k^2-l^2}{2}$$

$$z=\frac{k^2+l^2}{2}$$

(4) $x=2kl$

$$y=k^2-l^2$$

$$z=k^2+l^2$$

$$(k,\ l)=1$$

(2)	k	l			y	x	z
(4)			k	l	x	y	z
	3	1	2	1	4	3	5
	5	1	3	2	12	5	13
	5	3	4	1	8	15	17
	7	1	4	3	24	7	25
	7	3	5	2	20	21	29
	7	5	6	1	12	35	37
	9	1	5	4	40	9	41
	9	5	7	2	28	45	53

2 $x^2=(a+b)(a-b)$ の解

$$x^2=(a+b)(a-b)$$

において

$$(1)\quad \begin{aligned} a+b&=2k^2\\ a-b&=2l^2 \end{aligned}$$

とおくと

$$x=2kl$$

$$y=a=k^2-l^2$$

$$z=b=k^2+l^2$$

この式を公式(2)に代入して1の(4)と同じ式になる．

3 $x^2=4ab$ の解

$$x^2=4ab$$

において

$$(1)\quad \begin{aligned} a&=k^2 \\ b&=l^2 \end{aligned}$$

とおくと，公式(3)より

$$x=2kl$$
$$y=a-b=k^2-l^2$$
$$z=a+b=k^2+l^2$$

(2)と同じ式になる．

4 $(a+b+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2$ の解

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

において

$$(1)\ b^2=2ac \qquad (a,\ c)=1$$

とすると

$$a^2+2a(b+c)=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$\therefore\ (a+b+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2$$

となる．

$b^2=2ac$ の解

$$a=2k^2 \qquad (a,\ c)=1$$
$$b=2k(2l-1)$$
$$c=(2l-1)^2$$

また，これらを用い

$$x=a+b$$
$$y=b+c$$
$$z=a+b+c$$

とすると $x^2+y^2=z^2$ が成立する．

5 $(a+c)^2=(a+b)^2+c^2$ の解

$$(a+c)^2=(a+b)^2+c^2$$

とする．

$$(2)\quad \begin{aligned} 2ac&=2ab+b^2 \\ b^2&=2a(c-b) \end{aligned}$$

となる．

$$a=2k^2$$
$$b=2k(2l-1)$$
$$c'-b=(2l-1)^2$$
$$c'=2k(2l-1)+(2l-1)^2$$

これより

$$x=a+b$$
$$y=b+c'-b=c'$$
$$z=a+b+c'-b=a+c'$$

とすると $x^2+y^2=z^2$ が成立する．4と5は同じ表現である．表で示す．

表2

k	l	a	b	c	x	$y=c'$	z
1	1	2	2	1	4	3	5
1	2	2	6	9	8	15	17
1	3	2	10	25	12	35	37
1	4	2	14	49	16	63	65
2	1	8	4	1	12	5	13
2	2	8	12	9	20	21	29
2	3	8	20	25	28	45	53
2	4	8	28	49	36	77	85

6 $x^n=a^n+na^{n-1}b$ の解

$$x^n=a^n+na^{n-1}b=a^{n-1}(a+nb)$$

の式で

$$a=nl^n$$
$$a+nb=nk^n$$

とおくと

$$nb=n(k^n-l^n)$$
$$b=k^n-l^n$$

となる．

$$x^n=(nl^n)^{n-1}(nk^n)$$
$$=n^nk^nl^{n(n-1)}$$
$$\therefore\ x=nkl^{n-1}$$

これらの式を用いて

$$(a+b)^2=a^2+2ab \qquad +b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\cdots\cdots \qquad +b^3$$
$$\vdots$$
$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\cdots\cdots+b^n$$

の展開式で

$$x^n=a^n+na^{n-1}b$$
$$y^n=b^n$$
$$z^n=(a+b)^n$$

とすると

$$z^2=x^2+y^2\ (n=2)$$
$$z^n>x^n+y^n\ (n>2)$$

が成り立つ．

7 方程式 $ax^2-bx+c=0$ の解

$$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x\left(\frac{b}{a}-x\right)=\frac{c}{a}$$

$x=k^2,\ \frac{b}{a}-x=l^2$ とおくと

$$\frac{b}{a}=k^2+l^2,\ \frac{c}{a}=k^2l^2$$

となり，解の公式より

$$x=\frac{(k^2+l^2)\pm\sqrt{(k^2+l^2)^2-4k^2l^2}}{2}$$

$$=\frac{k^2+l^2\pm(k^2-l^2)}{2}=k^2,\ l^2$$

となる．

8 $(a+b+c)^n$ の展開式とその利用

$(a+b)^n$ の展開式の項の係数を並べていくとパスカルの三角形ができる．

パスカルの三角形

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
n & & & & & & & & & \\
0 & & & & & 1 & & & & \\
1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
2 & 3 & 4 \\ \hline
\times\begin{cases}1\\2\\1\end{cases} & \times\begin{cases}1\\3\\3\\1\end{cases} & \times\begin{cases}1\\4\\6\\4\\1\end{cases}
\end{array}$$

(1) $(a+b+c)^2$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 2 & & 2 & \\
1 & & 2 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & a^2 & \\
2ab & & 2ac \\ \hline
b^2 & 2bc & c^2
\end{array}$$

(2) $(a+b+c)^3$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & \\
 & 3 & & 6 & & 3 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & a^3 & & \\
 & 3a^2b & 3a^2c & \\
3ab^2 & 6abc & 3ac^2 & \\ \hline
b^3 & 3b^2c & 3bc^2 & c^3
\end{array}$$

(3) $(a+b+c)^4$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 4 & & 4 & & & \\
 & & 6 & & 12 & & 6 & & \\
 & 4 & & 12 & & 12 & & 4 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & a^4 & & & \\
 & 4a^3b & 4a^3c & & \\
 & 6a^2b^2 & 12a^2bc & 6a^2c^2 & \\
 & 4ab^3 & 12ab^2c & 12abc^2 & 4ac^3 \\ \hline
b^4 & 4b^3c & 6b^2c^2 & 4bc^3 & c^4
\end{array}$$

展開式の項を図のように分割する．

$(a,\ c)=1$

$(a+b)^n=b^n+A_n$

$(b+c)^n=b^n+C_n$

$(a+b+c)^n=b^n+A_n+B_n+C_n$

$$\begin{array}{cc}
A_n & B_n \\ \hline
b^n & C_n
\end{array}$$

とする．そこで

(4) $(a+b+c)^n=(a+b)^n+(a+c)^n$

が成り立つとすると

$$b^n+A_n+B_n+C_n=b^n+A_n+b^n+C_n$$

(5) $b^n=B_n$

が成り立つ．

$n=2$ のとき

$$a=2k^2 \quad c=l^2 \quad b=2kl$$

とおけば

$b^2=4k^2l^2 \quad 2ac=4k^2l^2$

$\therefore\ b^2=2ac=B_2$

となり，そのとき(4)が成立する．

$B_n=b^n$ の解

その1

(1) $B_2=2ac=b^2$

(2) $B_3=3ac(2b+a+c)$

(3) $B_4=4ac\left\{3b^2+3b(a+c)+a^2+\frac{3}{2}ac+c^2\right\}$

(4) $B_n=nac(pb+q) \quad (n>2)$

ただし，$(p,\ q)=1$　また $(b,\ q)=1$

$\therefore\ B_n=nac(pb+q)\fallingdotseq b^n$

となり(4)が成り立つのは $n=2$ のときに限る．

その2

(1) $b=2\times1=ac$ のとき

$B_2=2ac=b^2$

(2) $b=3\times2=ac$ のとき

$B_3>6acb=b^3$

$\vdots$

(4) $b=n(n-1)=ac$ のとき

$B_n>n(n-1)acb^{n-2}=b^n$

である．

よって，$B_n=b^n$ のとき $n=2$