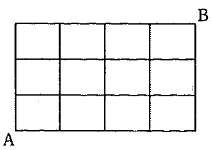
最短経路問題について

結川(ゆいかわ)　義明(よしあき)

数学Ⅰのほとんどの教科書で，次のような問題(ここでは，このような問題を“最短経路問題”と呼ぶことにする)が組合せの項目の例題として取り上げられている．

問　題

右の図のような道のある町がある．この町のA地点からB地点に至る最短経路は何通りあるか．



この問題は，同じものを含む順列の公式を使えば容易に解くことができる．応用問題として，

(a) ある特定の地点を通って最短経路で行く問題や
(b) ある特定の道を通らないで最短経路で行く問題

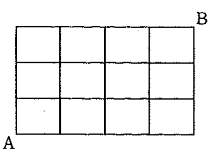
などを扱っている教科書も多い．

さて，我々の日常生活の中で考えた場合，目的地に最短経路で辿り着けるというのは意外に少ないのではないだろうか．例えば，車を運転されたことがある方なら，目的地への最短経路が工事中だったり，ひどい渋滞だったりして迂回したといった経験は1度はあるのではないだろうか．

そこで，発展問題として次のような問題を考えてみた．

発展問題1

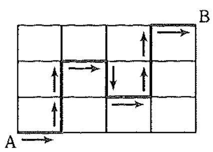
右の図のような道のある町がある．最短経路でA地点からB地点に行くつもりであったが，途中，道に迷い，下の方向(↓)に1度戻ってしまった．さて，このような経路は何通りあるか．



(解) 右へ1区画進むことを→，上へ1区画進むことを↑で表すと，右図の経路は，

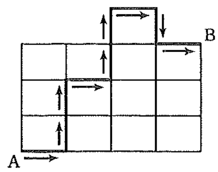
→↑↑→↓→↑↑→

で表される．AからBへ行く経路は4個の→，4個の↑，1個の↓の並べ方だけあるから，同じものを含む順列の公式より



$$\frac{9!}{4!\times4!\times1!}=630(\text{通り})$$

ただし，この中には右図の経路のように，途中で道の外に出てしまい，題意に反するものも含まれている．そこで，次に題意に反する経路が何通りあるか考えることにする．

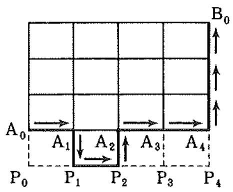


〈題意に反する経路〉(A＝A_0，B＝B_0とする)

(i) A_0P_0で始まるかQ_0B_0で終わる経路

このような経路は，4個の→と4個の↑の並べ方だけあるから

$$2\times\frac{8!}{4!\times4!}=140(\text{通り})$$

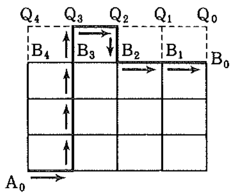


(A_0P_1で始まる例)

(ii) A_0P_1で始まるかQ_1B_0で終わる経路

このような経路は，3個の→と4個の↑の並べ方だけあるから

$$2\times\frac{7!}{3!\times4!}=70(\text{通り})$$



(Q_2B_0で終わる例)

(iii) A_0P_2で始まるかQ_2B_0で終わる経路

このような経路は，2個の→と4個の↑の並べ方だけあるから

$$2\times\frac{6!}{2!\times4!}=30(\text{通り})$$

(iv) A_0P_3で始まるかQ_3B_0で終わる経路

このような経路は，1個の→と4個の↑の並べ方だけあるから

$$2\times\frac{5!}{1!\times4!}=10(\text{通り})$$

(v) A_0P_4 で始まるか Q_4B_0 で終わる経路
このような経路は，それぞれ4個の↑の並べ方，すなわち1通りしかないから

$2\times1=2$(通り)

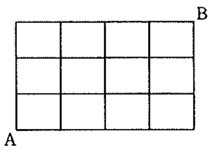
よって，題意を満たす経路は，全部で

$630-(140+70+30+10+2)=378$ ……(答)

更に，発展問題2として次のような問題を考えてみた．

発展問題2

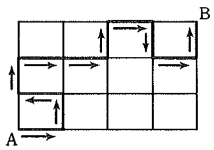
右の図のような道のある町がある．最短経路でA地点からB地点に行くつもりであったが，途中，道に迷い，下の方向(↓)と左の方向(←)に1度ずつ戻ってしまった．さて，このような経路は何通りあるか．



(解) 右の経路は，

→↑←↑→→↑→↓→↑

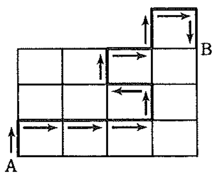
で表される．



5個の→，4個の↑，1個の←，1個の↓の並べ方だけあるから，同じものを含む順列の公式より

$$\frac{11!}{5!\times4!\times1!\times1!}=13860 \text{ (通り)}$$

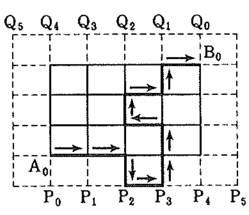
ただし，この中には右図の経路のように，途中で道の外に出てしまい，題意に反するものも含まれている．そこで，次に題意に反する経路が何通りあるか考えることにする．



〈題意に反する経路〉($A=A_0$, $B=B_0$とする)

(i) A_0P_i で始まるか Q_iB_0 で終わる経路($i=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

このような経路は，$(5-i)$個の→，4個の↑，1個の←の並べ方だけあるから

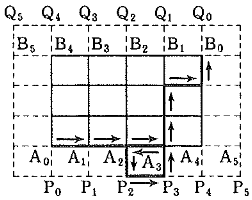


(A_0P_2で始まる例)

$$2\times\sum_{i=1}^{5}\frac{(10-i)!}{(5-i)!\times4!}$$
$$=2\times\sum_{k=0}^{5}\frac{(k+5)!}{k!\times4!}=4620$$

(ii) $A_0A_iP_i$ で始まるか $Q_iB_iB_0$ で終わる経路($i=0, 1, 2, 3, 4$)

$A_0\to A_1\to A_0\to A_1\to A_2\to P_2$,
$A_0\to A_1\to A_2\to A_1\to A_2\to P_2$,
$A_0\to A_1\to A_2\to A_3\to A_2\to P_2$ で始まる経路を $A_0A_2P_2$ で表す．右図は $A_0A_2P_2$ の経路の1つである．このような経路は，$(4-i)$個の→，4個の↑の並べ方が，それぞれ$(i+1)$あるから

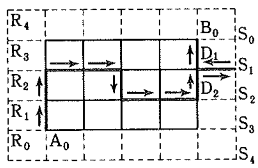


($A_0A_2P_2$で始まる例)

$$2\times\sum_{i=0}^{4}(i+1)\cdot\frac{(8-i)!}{(4-i)!\times4!}$$
$$=2\times\sum_{k=0}^{4}(5-k)\cdot\frac{(k+4)!}{k!\times4!}=420$$

(iii) A_0R_j で始まるか S_jB_0 で終わる経路($j=0, 1, 2, 3, 4$)

このような経路は，$(4-j)$個の↑，5個の→，1個の↓の並べ方だけあるから

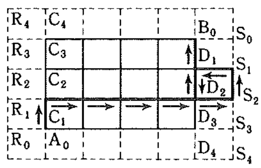


(S_1B_0で終わる例)

$$2\times\sum_{j=0}^{4}\frac{(10-j)!}{5!\times(4-j)!}=2\times\sum_{l=0}^{4}\frac{(6+l)!}{5!\times l!}=3960$$

(iv) $A_0C_jR_j$ で始まるか $S_jD_jB_0$ で終わる経路($j=0, 1, 2, 3$)

$S_1\to D_1\to D_2\to D_1\to B_0$,
$S_1\to D_1\to B_0\to D_1\to B_0$ で終わる経路を $S_1D_1B_0$ で表す．右図は $S_1D_1B_0$ の経路の1つである．



($S_1D_1B_0$で終わる例)

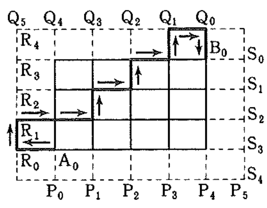
このような経路は，5個の→，$(3-j)$個の↑の並べ方が，それぞれ$(j+1)$あるから

$$2\times\sum_{j=0}^{3}(j+1)\cdot\frac{(8-j)!}{5!\times(3-j)!}$$
$$=2\times\sum_{l=0}^{3}(4-l)\cdot\frac{(l+5)!}{5!\times l!}=240$$

したがって，題意に反する経路は

$$4620+420+3960+240=9240$$

ただし，この中には，右図のような経路を重複して数えている．次に，重複した経路が何通りあるか考えることにする．



($P_5=S_4$, $Q_5=R_4$)

〈重複した経路〉

A_0P_iで始まりS_jB_0で終わる経路およびA_0R_jで始まりQ_iB_0で終わる経路($i=0,1,2,3,4,5$；$j=0,1,2,3,4$)

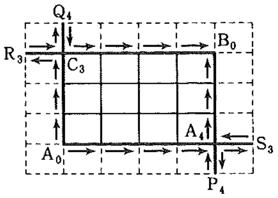
このような経路は，$(5-i)$個の→，$(4-j)$個の↑の並べ方だけあるから

$$2\times\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{4}\frac{(9-i-j)!}{(5-i)!\times(4-j)!}=2\times\sum_{k=0}^{5}\sum_{l=0}^{4}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}=922$$

更に，右図の２つの経路

(a) $A_0A_4P_4$で始まり$S_3D_3B_0$で終わる経路

(b) $A_0C_3R_3$で始まり$Q_4B_4B_0$で終わる経路も重複している．



したがって，重複した経路は

$$922+2=924$$

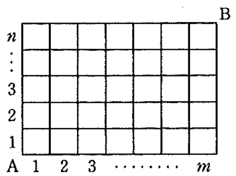
$$\left(\begin{array}{l} A_4=D_3,\ P_4=D_4 \\ S_3=A_5,\ C_3=B_4 \\ Q_4=C_4,\ R_3=B_5 \end{array}\right)$$

よって，題意を満たす経路は

$13860-(9240-924)=$ **5544** ……(答)

発展問題２を一般化すると，次のようになる．

横にm区画，縦にn区画の道のある町がある．最短経路でA地点からB地点に行くつもりであったが，途中，道に迷い，下の方向(↓)と左の方向(←)に1度ずつ戻ってしまった．このような経路の総数を$W(m,n)$とすると

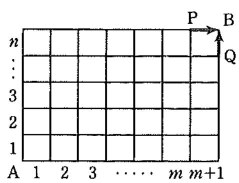


$$W(m,n)=\frac{mn(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}\quad(通り)$$

次に，$W(m+1,n)=\dfrac{n(m+1)(m+n+5)!}{(m+3)!\times(n+2)!}$を示すことにする．

〔証明〕

右図より，AからBに至る経路$W(m+1,n)$には，PからBへ至る経路(これを$W_1(m,n)$とする)と，QからBへ至る経路(これを$W_2(m+1,n-1)$とする)の２つの場合がある．すなわち，

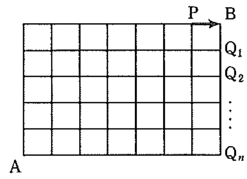


$$W(m+1,n)=W_1(m,n)+W_2(m+1,n-1)\cdots①$$

次に，$W_1(m,n)$および$W_2(m+1,n-1)$の経路がそれぞれ何通りあるかを考える．

(i) 経路$W_1(m,n)$について

$W_1(m,n)$についても，B，$Q_j(j=1,2,\cdots n)$を通過せずにPへ至る経路(これを$W_P(m,n)$とする)と，B，$Q_j(j=1,2,\cdots,n)$を通過してPへ至る経路(これを$W_Q(m,n)$とする)の２つの場合がある．



すなわち

$$W_1(m,n)=W_P(m,n)+W_Q(m,n)\quad\cdots\cdots ②$$

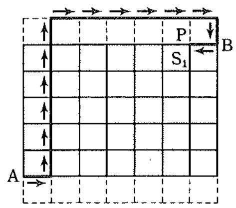
$W_P(m,n)$は$W(m,n)$に他ならないから，

$$W_P(m,n)=\frac{mn(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}$$

次に，$W_Q(m,n)$について考える．

〔1〕BからPへ至る経路

BからPへ至る経路は



$$\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+1)!}$$

およびPからS_1を経てPに戻る経路，すなわち

$$\frac{(m+n+1)!}{(m+1)!\times n!}$$

この中で，右上図のような題意に反する経路は

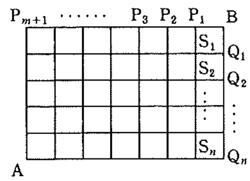
$$2\times\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times(n+1)!}$$

よって，題意を満たし，BからPへ至る経路は

$$\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+1)!}+\frac{(m+n+1)!}{(m+1)!\times n!}-2\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times(n+1)!}$$

〔2〕Q_jからPへ至る経路

発展問題２の解 (iii)，(iv) よりQ_jPで終わる経路とQ_jS_jPで終わる経路の２つの場合がある．



Q_jPで終わる経路は

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(m+n+3-j)!}{(m+1)!\times(n+1-j)!}=\sum_{l=1}^{n}\frac{(m+l+2)!}{(m+1)!\times l!}$$

Q_jS_jPで終わる経路は

$$\sum_{j=1}^{n}(j+1)\cdot\frac{(m+n+1-j)!}{(m+1)!\times(n-j)!}-1$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}(n-l+1)\cdot\frac{(m+l+1)!}{(m+1)!\times l!}-1$$

この中で，題意に反する経路は，

$$\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(m+n+2-i-j)!}{(m+1-i)!\times(n+1-j)!}=\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{l=1}^{n}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}$$

よって，題意を満たし，Q_j から P へ至る経路は

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{(m+l+2)!}{(m+1)!\times l!}+\sum_{l=0}^{n-1}(n-l+1)\cdot\frac{(m+l+1)!}{(m+1)!\times l!}$$
$$-1-\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{l=1}^{n}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}$$
$$=\sum_{l=0}^{n}\frac{(m+l+2)!}{(m+1)!\times l!}+\sum_{l=0}^{n-1}(n-l+1)\cdot\frac{(m+l+1)!}{(m+1)!\times l!}$$
$$-\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{l=0}^{n+1}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}-1$$

(∵ $l=0$ のとき

$$\left.\frac{(m+l+2)!}{(m+1)!\times l!}-\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}=(m+2)-(m+2)=0\right)$$

したがって，〔1〕〔2〕より

$W_Q(m,n)$

$$=\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+1)!}+\frac{(m+n+1)!}{(m+1)!\times n!}$$
$$-2\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times(n+1)!}+\sum_{l=0}^{n}\frac{(m+l+2)!}{(m+1)!\times l!}$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}(n-l+1)\cdot\frac{(m+l+1)!}{(m+1)!\times l!}-\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{l=0}^{n}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}-1$$
$$=\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+1)!}-\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times(n+1)!}$$
$$+\sum_{l=0}^{n}\frac{(m+l+2)!}{(m+1)!\times l!}+\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)\cdot\frac{(m+l+1)!}{(m+1)!\times l!}$$
$$-\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{l=0}^{n+1}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}-1$$
$$=\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+1)!}-\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+2)!}$$
$$+\sum_{l=0}^{n}(m+n+3)\cdot\frac{(m+l+1)!}{(m+1)!\times l!}$$
$$-\left\{\frac{(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}-1\right\}-1$$

$$\left(\because\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times(n+1)!}=\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+2)!}\right.$$
$$\left.\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{l=0}^{n+1}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}=\frac{(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}-1\right)$$

$$=\frac{(n+1)(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+2)!}+\frac{(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}$$
$$-\frac{(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}$$

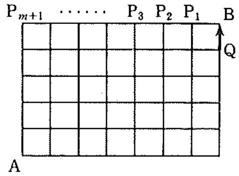
$$\left(\because\sum_{l=0}^{n}\frac{(m+l+1)!}{(m+1)!\times l!}=\frac{(m+n+2)!}{(m+2)!\times n!}\right)$$

$$=\frac{n(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}$$

よって，②より

$$W_1(m,n)=\frac{mn(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}+\frac{n(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}$$
$$=\frac{n(m+1)(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}$$

(ii) 経路 $W_2(m+1,n-1)$ について



$W_2(m+1,n-1)$ についても，B，$P_i(i=1,2,\cdots,m+1)$ を通過せずに Q へ至る経路(これを $W_Q(m+1,n-1)$ とする)と，B，$P_i(i=1,2,\cdots,m+1)$ を通過して Q へ至る経路(これを $W_P(m+1,n-1)$ とする)の 2 つの場合がある．すなわち

$$W_2(m+1,n-1)$$
$$=W_Q(m+1,n-1)+W_P(m+1,n-1)\ \cdots\cdots③$$

$W_Q(m+1,n-1)$ は発展問題 2 と同様に考えて，

$$W_Q(m+1,n-1)=\frac{(m+n+4)!}{(m+2)!\times n!}$$
$$-2\left[\left\{\sum_{k=0}^{m+2}\frac{(k+n+1)!}{k!\times n!}+\sum_{k=0}^{m+1}(m+2-k)\cdot\frac{(k+n)!}{k!\times n!}\right\}\right.$$
$$+\left\{\sum_{l=0}^{n}\frac{(l+m+3)!}{l!\times(m+2)!}+\sum_{l=0}^{n-1}(n-l)\cdot\frac{(l+m+2)!}{l!\times(m+2)!}\right\}$$
$$\left.-\left\{\sum_{k=0}^{m+2}\sum_{l=0}^{n}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}+1\right\}\right]$$
$$=\frac{(m+n+4)!}{(m+2)!\times n!}-\frac{2(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}-\frac{2(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}$$
$$-2\left\{\sum_{k=0}^{m+1}(m+n+3)\cdot\frac{(k+n)!}{k!\times n!}\right.$$
$$+\sum_{l=0}^{n-1}(m+n+3)\cdot\frac{(l+m+2)!}{l!\times(m+2)!}$$
$$\left.-\frac{(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}\right\}$$

$$\left(\because\sum_{k=0}^{m+2}\sum_{l=0}^{n}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}=\frac{(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}-1\right)$$

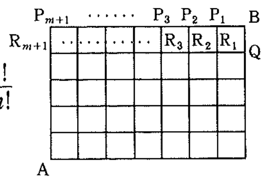
$$=\frac{(m+n)(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}+\frac{2(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}$$
$$-\frac{2(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+1)!}-\frac{2(m+n+3)!}{(m+3)!\times(n-1)!}$$

$$\left(\because\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n)!}{k!\times n!}=\frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\times(n+1)!}\right.$$
$$\left.\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(l+m+2)!}{l!\times(m+2)!}=\frac{(m+n+2)!}{(m+3)!\times(n-1)!}\right)$$

$$=\frac{(m+1)(n-1)(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}$$

次に，$W_P(m+1,n-1)$ については，$W_Q(m,n)$ と同様に考える．

〔1〕 B から Q へ至る経路



$$\frac{(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}+\frac{(m+n+1)!}{(m+1)!\times n!}$$
$$-2\sum_{l=0}^{n}\frac{(l+m+2)!}{l!\times(m+2)!}$$

〔2〕 P_i から Q へ至る経路

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times n!}+\sum_{k=0}^{m}(m+2-k)\cdot\frac{(k+n)!}{k!\times n!}$$
$$-\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}-1$$
$$=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times n!}+\sum_{k=0}^{m}(m+2-k)\cdot\frac{(k+n)!}{k!\times n!}$$
$$-\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}-1$$

$\left(\because k=0\right.$ のとき
$$\left.\frac{(k+n+1)!}{k!\times n!}-\sum_{l=0}^{n}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}=(n+1)-(n+1)=0\right)$$

したがって，〔1〕〔2〕より

$W_{\mathrm{P}}(m+1,n-1)$
$$=\frac{(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}+\frac{(m+n+1)!}{(m+1)!\times n!}-2\sum_{l=0}^{n}\frac{(l+m+2)!}{l!\times(m+2)!}$$
$$+\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times n!}+\sum_{k=0}^{m}(m+2-k)\cdot\frac{(k+n)!}{k!\times n!}$$
$$-\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}-1$$
$$=\frac{(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}-\sum_{l=0}^{n}\frac{(l+m+2)!}{l!\times(m+2)!}$$
$$+\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n+1)!}{k!\times n!}+\sum_{k=0}^{m+1}(m+2-k)\cdot\frac{(k+n)!}{k!\times n!}$$
$$-\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m+2}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}-1$$
$$=\frac{(m+n+3)!}{(m+2)!\times n!}-\frac{(m+n+3)!}{(m+3)!\times n!}$$
$$+\sum_{k=0}^{m+1}(m+n+3)\cdot\frac{(k+n)!}{k!\times n!}$$
$$-\left\{\frac{(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}-1\right\}-1$$
$$\left(\because\sum_{l=0}^{n}\frac{(l+m+2)!}{l!\times(m+2)!}=\frac{(m+n+3)!}{(m+3)!\times n!}\right.$$
$$\left.\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m+2}\frac{(k+l)!}{k!\times l!}=\frac{(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}-1\right)$$
$$=\frac{(m+2)(m+n+3)!}{(m+3)!\times n!}+\frac{(m+n+3)!}{(m+1)!\times(n+1)!}$$
$$-\frac{(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}$$
$$\left(\because\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(k+n)!}{k!\times n!}=\frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\times(n+1)!}\right)$$
$$=\frac{(m+1)(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}$$

よって，③より

$W_2(m+1,n-1)$
$$=\frac{(m+1)(n-1)(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}+\frac{(m+1)(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}$$
$$=\frac{n(m+1)(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}$$

①より

$W(m+1,n)$
$$=\frac{n(m+1)(m+n+4)!}{(m+2)!\times(n+2)!}+\frac{n(m+1)(m+n+4)!}{(m+3)!\times(n+1)!}$$
$$=\frac{n(m+1)(m+n+5)!}{(m+3)!\times(n+2)!}$$
（終）

〔注1〕

発展問題 2 は $(m,n)=(4,3)$ の場合に他ならない．
すなわち
$$W(4,3)=\frac{4\times3\times(4+3+4)!}{(4+2)!\times(3+2)!}=\frac{12!}{6!\times5!}=5544\text{（通り）}$$

〔注2〕

発展問題1を一般化すると，次の式が得られる．
$$W(m,n)=\frac{n(m+n+2)!}{m!\times(n+2)!}$$
（証明略）

教科書に載っている既成の問題は公式や解き方を知っていれば簡単に解けることが多い(既習事項を確認する意味でそのような問題を取り上げていると思うのだが……)．しかし，そのようなパターン化した問題を解かせるだけでは，数学的な思考力は養われないのではないだろうか．たまには，パターンから外れた(あまり外れ過ぎると混乱だけが生じ効果的ではないが……)問題を解かせることも数学的な思考力を培うには必要ではないだろうか．その意味で，発展問題１程度なら，一風変わった問題として，生徒に解かせても面白いのではないだろうか．

（埼玉県立志木高等学校）