高次方程式の判別式について

大木（おおき） 實（みのる）

係数が実数の整方程式　$f(x)=0$　①

について　　$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2=a_0(x-\alpha)(x-\beta)$　$(a_0\fallingdotseq 0)$　②

ならば，解 α，β が重解か否か，また，実数か否か，を調べるのに

$D=a_1{}^2-4a_0a_3=a_0{}^2(\alpha-\beta)^2$　の値を求め，$D=0$ か $D\fallingdotseq 0$ か，また $D>0$ か $D<0$ かを調べます．

D を　"方程式①の判別式；整式②の判別式；α，β の判別式"　などといいます．

この考えを一般化し，今後①は n 次方程式の場合を扱い

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$　$(a_0\fallingdotseq 0)$　$(n\geqq 2)$　③

として，その判別式の条件を考えます．

このとき①が解として虚数 $\alpha=p+qi$ $(p, q(\fallingdotseq 0)$ は実数，$i=(-1)^{\frac{1}{2}})$ をもてば，同時に α の共役複素数 $\overline{\alpha}=p-qi$ も解となります．ゆえに，$f(x)$ は $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=(x-p)^2+q^2$ を因数にもちます．

①は n 個の解をもつので，m 対の共役複素数 $\alpha_k=p_k+q_ki, \overline{\alpha}_k=p_k-q_ki$ $(k=1,2,\cdots\cdots,\ m)$ と，残り $s=n-2m$ 個の実数 t_h $(h=1,2,\cdots\cdots,\ s)$ を解とするとき

$$f(x)=a_0\prod_{k=1}^{m}\{x-(p_k+q_ki)\}\{x-(p_k-q_ki)\}\prod_{h=1}^{s}(x-t_h)=a_0\prod_{k=1}^{m}(x-\alpha_k)(x-\overline{\alpha}_k)\prod_{h=1}^{s}(x-t_h)$$

と表せます．$(x-\alpha_k)(x-\overline{\alpha}_k)$ の判別式が $(\alpha_k-\overline{\alpha}_k)^2=-4q_k{}^2<0$ なので

$\prod_{k=1}^{m}(\alpha_k-\overline{\alpha}_k)^2=\prod_{k=1}^{m}(-4q_k{}^2)$ の符号は $(-1)^m$ の符号と同じです．

n が奇数のとき s は奇数となり①は 1 個以上の実数解をもちます［充分大きな正数 x_0 をとると $x<-x_0$ のとき $a_0f(x)<0$，$x>x_0$ のとき $a_0f(x)>0$ なので明らかです］．

$(p_k,\ q_k)=(p_{k'},\ q_{k'})$，$1\leqq k<k'\leqq m$　あるいは　$t_h=t_{h'}$，$1\leqq h<h'\leqq s$

を満たす k, k' あるいは h, h' が存在するときは①は重解をもち

$\prod_{k=2}^{m}\prod_{k'=1}^{k-1}(\alpha_k-\alpha_{k'})\prod_{h=2}^{s}\prod_{h'=1}^{h-1}(t_h-t_{h'})$ の値は 0 となります．

$\alpha_{m+k}=\overline{\alpha}_k$ $(k=1,2,\cdots\cdots,\ m)$，$s\geqq 1$ のとき $\alpha_{2m+h}=t_h$　$(h=1,2,\cdots\cdots,\ s)$　④

とおくと α_k $(k=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ は①のすべての解を表します．

③の判別式を次式 D で定義します．$D=a_0{}^{2n-2}\prod_{k=2}^{n}\prod_{k'=1}^{k-1}(\alpha_k-\alpha_{k'})^2$　⑤

ただし，⑤の右辺は③の係数 a_k $(k=0,1,2,\cdots\cdots,\ n)$ を用いて表される整式です．

命題 1． ⑤の D の値は①が重解をもつときは 0 となり，重解がなく共役複素数の解を m 対もつときはその符号が，m が偶数のときは正，奇数のときは負となります．

証明： ④の場合 $D=D(m,s)$ で表し，$D\fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{D}{|D|}=\varepsilon(m,s)$ とおきます．

$\varepsilon(0,h)=1$ $(h=1,2,\cdots\cdots)$，$\varepsilon(1,0)=-1$，$\varepsilon(1,1)=-1$

$D(m,s+1)=a_0{}^2D(m,s)\prod_{k=1}^{m}\{(t_{s+1}-\alpha_k)(t_{s+1}-\overline{\alpha}_k)\}^2\prod_{h=1}^{s}(t_{s+1}-t_h)^2$,

$(t_{s+1}-\alpha_k)(t_{s+1}-\overline{\alpha}_k)>0$　$\therefore$　$\varepsilon(m,s+1)=\varepsilon(m,s)$　$\therefore$　$\varepsilon(1,h)=-1$　$(h=0,1,2,\cdots\cdots)$

$$D(m+1,s)=a_0{}^4D(m,s)(\alpha_{m+1}-\overline{\alpha}_{m+1})^2\prod_{h=1}^{s}\{(\alpha_{m+1}-t_h)(\overline{\alpha}_{m+1}-t_h)\}^2$$

$$\cdot\prod_{h=1}^{s}\{(\alpha_{m+1}-\alpha_k)(\overline{\alpha}_{m+1}-\overline{\alpha}_k)(\alpha_{m+1}-\overline{\alpha}_k)(\overline{\alpha}_{m+1}-\alpha_k)\}^2$$

$(\alpha_{m+1}-t_h)(\overline{\alpha}_{m+1}-t_h)>0$, $(\alpha_{m+1}-\alpha_k)(\overline{\alpha}_{m+1}-\overline{\alpha}_k)>0$, $(\alpha_{m+1}-\overline{\alpha}_k)(\overline{\alpha}_{m+1}-\alpha_k)>0$,

$(\alpha_{m+1}-\overline{\alpha}_{m+1})^2<0$　$\therefore$　$\varepsilon(m+1,s)=-\varepsilon(m,s)$　$\therefore$　$\varepsilon(k,h)=(-1)^k\varepsilon(0,h)=(-1)^k$

$(k=0,1,2,\cdots\cdots;h=0,1,2,\cdots\cdots)$．⑤から①の解に重解があれば $D=0$ となり，逆も成立．

命題2．⑤の D を③の $f(x)$ の係数 a_k $(k=0,1,2,\cdots\cdots,\ n)$を使って表せます．

証明：

$$E(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1{}^2 & \alpha_1{}^3 & * & \alpha_1{}^{n-1}\\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2{}^2 & \alpha_2{}^3 & * & \alpha_2{}^{n-1}\\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3{}^2 & \alpha_3{}^3 & * & \alpha_3{}^{n-1}\\ * & * & * & * & * & *\\ 1 & \alpha_n & \alpha_n{}^2 & \alpha_n{}^3 & * & \alpha_n{}^{n-1}\end{vmatrix}$$

とおくと E は $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n$ に関し次数が $1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ の同次式となり，任意の $k,m(1\leqq k<m\leqq n)$ で $E(\cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \cdots)$ に対し $E(\cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots)=0$ となり，E は $\alpha_m-\alpha_k$, $(1\leqq k<m\leqq n)$を因数にもちます．展開式の項 $\alpha_2\alpha_3{}^2\cdots\cdots\alpha_n{}^{n-1}$ の係数が1なので次式が成立します．

$$E=\prod_{k=2}^{n}\prod_{m=1}^{k-1}(\alpha_k-\alpha_m)\quad ⑥$$

$$E^2=\begin{vmatrix}1 & 1 & * & * & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & * & * & \alpha_n\\ * & * & * & * & *\\ * & * & * & * & *\\ \alpha_1{}^{n-1} & * & * & * & \alpha_n{}^{n-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & * & * & \alpha_1{}^{n-1}\\ 1 & \alpha_2 & * & * & \alpha_2{}^{n-1}\\ * & * & * & * & *\\ * & * & * & * & *\\ 1 & \alpha_n & * & * & \alpha_n{}^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & * & & \beta_n\\ \beta_2 & \beta_3 & * & * & \beta_{n+1}\\ * & * & * & * & *\\ * & * & * & * & *\\ \beta_n & \beta_{n+1} & * & * & \beta_{2n-1}\end{vmatrix}$$

$\beta_k=\sum_{h=1}^{n}\alpha_h{}^{k-1}$ は $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n$ に関し対称式なので⑤，⑥から　$D=a_0{}^{2n-2}E^2$　⑦

は $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$ で表せます．

命題3．$n\geqq 2$のとき①が重解をもつための必要十分な条件は

①［$f(x)=0$］と①の微分式［$f'(x)=0$］とが共通解をもつことです．

証明：α が①の重解のとき $f(x)=(x-\alpha)^2p(x)$　ただし，$p(x)$ は $n-2$ 次式とおけますから

$$f'(x)=(x-\alpha)\{2p(x)+(x-\alpha)p'(x)\}$$

となり，$f(x)$，$f'(x)$ は共通な因数 $x-\alpha$ をもちます．

逆に $f(\alpha)=0$ かつ $f'(\alpha)=0$ のとき

$n-1(\geqq 1)$次式の $f'(x)$ は　$f'(x)=(x-\alpha)h(x)$　$h(x)$ は $n-2$ 次式とおけます．

$$\therefore\quad f(x)=\int_\alpha^x(x-\alpha)h(x)dx=\frac{(x-\alpha)^2h(x)-\int_\alpha^x(x-\alpha)^2h'(x)dx}{2}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\int_\alpha^x(x-\alpha)^2h'(x)dx}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)^2h'(x)=0,\ \int_\alpha^x(x-\alpha)^2h'(x)dx \text{ は } n \text{ 次式,}$$

$$\therefore\quad \frac{\int_\alpha^x(x-\alpha)^2h'(x)dx}{x-\alpha}=(x-\alpha)g(x),\ g(x) \text{ は } n-2 \text{ 次式とおけます.}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{(x-\alpha)^2\{h(x)-g(x)\}}{2}$$

$f(x)$ は $n(\geqq 2)$次式なので $h(x)-g(x)$ は定数0ではなく，①は重解 α をもちます．

命題4．$f(x)=0$ と $f'(x)=0$ とが共通根をもつための必要十分な条件は行列式

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & * & * & a_n & & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & * & * & a_n & & & \\ & & * & * & * & * & * & * & & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & * & * & a_n & \\ na_0 & (n-1)a_1 & * & * & a_{n-1} & & & & & \\ & na_0 & (n-1)a_1 & * & * & a_{n-1} & & & & \\ & & * & * & * & * & * & & & \\ & & & * & * & * & * & * & & \\ & & & & na_0 & (n-1)a_1 & * & * & a_{n-1} & \end{vmatrix} \quad (\text{空白は}0) \quad ⑧$$

に対し $R=0$ が成立することです[R は $f(x)$, $f'(x)$ の終結式です].

証明：共通解を α とし $f(\alpha)=0$ と $f'(\alpha)=0$ とから α を消去した式を求めます.

$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ ならば $f'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_k x^{n-k-1}$ なので $f(\alpha)=0$ かつ $f'(\alpha)=0$ のときは

$\alpha^h\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^{n-k}=0$ $(h=0,1,2,\cdots\cdots,\ n-2)$, $\alpha^h\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_k\alpha^{n-k-1}=0$ $(h=0,1,2,\cdots\cdots,\ n-1)$

が成立し，この $2n-1$ 個の α の多項式[最高次数 $2n-2$]から $\alpha^h(h=1,2,\cdots\cdots,\ 2n-2)$ を消去して⑧の R について $R=0$ が得られます.

逆に $R=0$ のとき，⑧の $2n-1$ 次正方行列を A とし，A の転置行列を A' で表します.

$2n-1$ 次列ベクトル X, O の転置行列は $X'=(x^{2n-2},\ x^{2n-3},\ \cdots\cdots,\ x, 1)$, $O'=(0,0,\cdots\cdots,\ 0)$ とします.

$|A'|=|A|=R=0$

$\therefore$ $A'C=O, C\neq O$ を満たす $2n-1$ 次列ベクトル C が存在し，$C'=(c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{2n-1})$ とします.

$C'AX=(A'C)'X=O'X=0$ 一方，この $C'AX$ の展開式は

$C'AX=(c_1,\ c_2,\cdots\cdots,\ c_{2n-1})(x^{n-2}f(x),\ x^{n-3}f(x),\cdots\cdots,\ f(x),\ x^{n-1}f'(x),\ x^{n-2}f'(x),\cdots\cdots,\ f'(x))'$

$\quad=(c_1x^{n-2}+c_2x^{n-3}+\cdots\cdots+c_{n-1})f(x)+(c_nx^{n-1}+c_{n+1}x^{n-2}+\cdots\cdots+c_{2n-1})f'(x)$

ゆえに $f(x)=0$ と $f'(x)=0$ とには共通解があります.

命題5．⑥の D は　$D=\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0}R$ と表せます.

証明：③の右辺を因数分解し，$\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}=a_0\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$ とします．この右辺を展開し

$\dfrac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n)$, $\dfrac{a_2}{a_0}=\alpha_1\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n$, $\cdots\cdots$, $\dfrac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n$

$\dfrac{a_k}{a_0}$ は $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots\cdots, -\alpha_n$ の n 個から k 個を選びその積を作り，選び方 ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りすべてにつきその和を表します．ゆえに $\dfrac{a_k}{a_0}$ は $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n$ に関し k 次の対称式です.

この各式を⑧に代入すると　$G={a_0}^{1-2n}R$　⑨　は $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha_n$ の対称式となります.

$\alpha_k=\alpha_m$, $1\leqq k<m\leqq n$ を満たす k, m が存在するときは①が重解をもち，$R=0$ となるので G は $\alpha_k-\alpha_m$ を因数にもちます．対称式の関係から G は⑥の E で割り切れ，その商を H とします.

$G(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)=E(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)\cdot H(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$ で α_k, $\alpha_m(1\leqq k<m\leqq n)$ を交換すると

$\quad G(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_n)=G(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \cdots,\ \alpha_n)$,

$\quad E(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_n)=-E(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \cdots,\ \alpha_n)$.

$\therefore$ $H(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_n)=-H(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \cdots,\ \alpha_n)$.

$\therefore$ $H(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_n)=-H(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_n)$.

$\therefore$ $H(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \cdots,\ \alpha_n)=0$

となりHは$\alpha_k-\alpha_m$を因数とします．$1\leqq k<m\leqq n$を満たす任意のk, mについても同様なのでHはEの倍数です．よって，GはE^2の倍数で，E^2はα_1，α_2，……，α_nに関し$n(n-1)$次の同次式です．

行列式Rの(i, j)要素をa_0b_{ij}とすると⑧から次に示す項以外は値が0です．

$1\leqq i\leqq n-1$のとき　$a_0b_{ij}=a_{j-i}(0\leqq j-i\leqq n)$

$n\leqq i\leqq 2n-1$のとき　$a_0b_{ij}=(i-j+1)a_{j-i+n-1}(i-n+1\leqq j\leqq i)$となり，⑧の展開した項

$a_0{}^{2n-1}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots\cdots b_{2n-1p_{2n-1}}$　$[(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_{2n-1})$は$(1, 2, \cdots\cdots,\ 2n-1)$の順列$]$

は個数が$(2n-1)!$個あり，そのいずれもa_0以外の$-\alpha_1$，$-\alpha_2$，……，$-\alpha_n$に関する次数は

$(p_1-1)+(p_2-2)+\cdots\cdots+(p_{n-1}-n+1)+\{(p_n-n)+(p_{n+1}-n-1)+\cdots\cdots+(p_{2n-1}-2n+1)+n(n-1)\}$

$=n(n-1)$となり，Gはα_1，α_2，……，α_nに関し$n(n-1)$次の同次式です．

ゆえに$G_q=E^2$　⑩とおくと，qは$\alpha_k\,(1\leqq k\leqq n)$に無関係な定数です．

定数qの値を　$f(x)=a_0(x^n-1)$　$\therefore$　$f'(x)=na_0x^{n-1}$　として求めます．この場合⑧，⑨から

$$G=\begin{vmatrix}
1 & & & & & -1 & & & \\
 & 1 & & & & & -1 & & \\
 & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & & -1 \\
n & & & & & & & & \\
 & n & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & n & & & & & \\
 & & & & n & & & &
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & n & & & \\
 & & & & & & n & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & n \\
 & & & & n & & & &
\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}
 & n & & & \\
 & & n & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & n \\
n & & & &
\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n\begin{vmatrix}
n & & & \\
 & n & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & n
\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n^n$$

（空白の要素は０）

この場合の解は$\alpha_k=J^{k-1}(k=1, 2, \cdots\cdots,\ n)$　ただし，$J=e^{\frac{2\pi i}{n}}$　$\therefore$　$\alpha_k{}^n=1$

$\therefore$　$\beta_1=n, \beta_{n+1}=n$　その他　$2\leqq k\leqq n$　または　$n+2\leqq k\leqq 2n-1$　のときは

$$\beta_k=\sum_{h=1}^{n}\alpha_h{}^{k-1}=\sum_{h=1}^{n}J^{(h-1)(k-1)}=\frac{1-J^{n(k-1)}}{1-J^{k-1}}=0$$

$$\therefore\quad E^2=\begin{vmatrix}
n & & & & \\
 & & & & n \\
 & & & n & \\
 & & \ddots & & \\
 & n & & &
\end{vmatrix}=n\begin{vmatrix}
 & & & n \\
 & & n & \\
 & \ddots & & \\
n & & &
\end{vmatrix}=n^n(-1)^{(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1}=n^n(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$\therefore\quad q=\frac{E^2}{G}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\qquad \text{この値と⑦，⑩，⑨から}\quad D=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0}R$$

具体例

1)　$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3(a_0\neq 0)$　$\therefore$　$f'(x)=3a_0x^2+2a_1x+a_2$

$$D=-\frac{1}{a_0}\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
3a_0 & 2a_1 & a_2 & & \\
 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & \\
 & & 3a_0 & 2a_1 & a_2
\end{vmatrix}=-(27a_0{}^2a_3{}^2-18a_0a_1a_2a_3+4a_0a_2{}^3+4a_1{}^3a_3-a_1{}^2a_2{}^2)$$

2) $f(x)=x^3+x^2-2 \quad \therefore \quad f'(x)=3x^2+2x$

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & & -2 & \\ & 1 & 1 & & -2 \\ 3 & 2 & & & \\ & 3 & 2 & & \\ & & 3 & 2 & \end{vmatrix}=-100<0 \quad f(x)=(x-1)(x^2+2x+2) \quad \text{ゆえに } x=1,\ -1\pm i$$

3) $f(x)=x^3-x^2-x+1 \quad \therefore \quad f'(x)=3x^2-2x-1$

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \\ & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & & \\ & 3 & -2 & -1 & \\ & & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad f(x)=(x+1)(x-1)^2 \quad \text{ゆえに } x=-1,1,1$$

4) $f(x)=x^4+5x^2+4 \quad \therefore \quad f'(x)=4x^3+10x$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & & 5 & & 4 & & \\ & 1 & & 5 & & 4 & \\ & & 1 & & 5 & & 4 \\ 4 & & 10 & & & & \\ & 4 & & 10 & & & \\ & & 4 & & 10 & & \\ & & & 4 & & 10 & \end{vmatrix}=5184>0 \quad f(x)=(x^2+1)(x^2+4) \quad \text{ゆえに } x=\pm i,\ \pm 2i$$

5) $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \quad \therefore \quad f'(x)=4x^3-6x^2+4x-2$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 4 & -2 & & & \\ & 4 & -6 & 4 & -2 & & \\ & & 4 & -6 & 4 & -2 & \\ & & & 4 & -6 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0 \quad f(x)=(x-1)^2(x^2+1) \quad \text{ゆえに } x=1,1,\pm i$$

《重解に関しての補足》

命題６．n 次方程式 $f(x)=0$ が α を $m(2\leqq m\leqq n)$ 重解にもつ必要十分な条件は微分式
　$f^{(r)}(\alpha)=0\ (r=0,1,2,\cdots\cdots,\ m-1)$，$f^{(m)}(\alpha)\fallingdotseq 0$ がすべて成立することです．

証明：$f(x)$ を $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x-\alpha)^k$ とおき $(x-\alpha)$ のベキ級数に展開すると，r 次導関数は

$$f^{(r)}(x)=\sum_{k=r}^{n} c_k k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)(x-\alpha)^{k-r} \quad (0\leqq r\leqq n) \quad \therefore \quad f^{(r)}(\alpha)=c_r r\,!$$

　必要条件：$f(x)$ が $(x-\alpha)^m$ で割り切れ，$(x-\alpha)^{m+1}$ で割り切れないためには
　　$c_r=0\ (r=0,1,2,\cdots\cdots,\ m-1)$ かつ $c_m\fallingdotseq 0$
　　$\therefore\quad f^{(r)}(\alpha)=0\ (r=0,1,2,\cdots\cdots,\ m-1)$ かつ $f^{(m)}(\alpha)\fallingdotseq 0$ が必要です．

　十分条件：$f^{(r)}(\alpha)=0\ (r=0,1,2,\cdots\cdots,\ m-1)$ かつ $f^{(m)}(\alpha)\fallingdotseq 0$ のときは
　　$c_r=0\ (r=0,1,2,\cdots\cdots,\ m-1)$ かつ $c_m\fallingdotseq 0$ が成立するので $f(x)$ は因数 $(x-\alpha)$ をちょうど m 個もち，α は $f(x)=0$ の m 重解になります．

（ただし，$r=0,1,2,\cdots\cdots,\ m-1$）

[$f(x)=0$ の重解 α が求まれば，その重解度 m は $f(x)$ を組立除法により $x-\alpha$ で繰り返し割って求めるのが便利です]

命題7．高次方程式 $f(x)=0$ について，$f(x)$ と $f'(x)$ の最大公約数を $g(x)$ とすると，$f(x)=0$ の重解は，同時に $g(x)=0$ の解であり，α が $f(x)=0$ の $m(\geqq 3)$ 重解のときは，α は同時に $g(x)=0$ の $m-1$ 重解です．逆も成立します．

証明：命題3．により α が $f(x)$ の重解のときは $x-\alpha$ は $f(x)$，$f'(x)$ 共通の因数なので $g(x)$ の因数です．

$\therefore\ \ g(\alpha)=0$

逆に $g(\alpha)=0$ ならば $f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0$ が成立し，α は $f(x)=0$ の重解です．

命題6．により α が $f(x)$ の m 重解のときは $f(x)$ は $(x-\alpha)^m$ で割れ，$f'(x)$ の $(x-\alpha)$ ベキ展開式が $(x-\alpha)^{m-1}$ で割れ，$(x-\alpha)^m$ で割れませんから $g(x)$ は $(x-\alpha)^{m-1}$ を因数にもち，α は $g(x)=0$ の $m-1$ 重解です．

逆に α が $g(x)=0$ の $m-1$ 重解のとき $f'(x)$ は $(x-\alpha)^{m-1}$ で割れ，$(x-\alpha)$ ベキ展開式は

$f'(x)=(x-\alpha)^{m-1}\sum_{k=0}^{n-m}c_k(x-\alpha)^k=\sum_{k=0}^{n-m}c_k(x-\alpha)^{m+k-1}$ (各 c_k は定数)　と表せます．

$\therefore\ \ f(x)=\sum_{k=0}^{n-m}\frac{c_k(x-\alpha)^{m+k}}{m+k}+c$ (c は定数)　$f(\alpha)=0$　$\therefore\ \ c=0$

$\therefore\ \ f(x)=(x-\alpha)^m\sum_{k=0}^{n-m}\frac{c_k}{m+k}(x-\alpha)^k$ となり α は $f(x)=0$ の m 重解になります．

1995.10.1（元 追手門学院高校）