両不等式　2数の大小に関する試み

高橋　敏雄（たかはし　としお）

1．はじめに

不等式の扱う証明は，極めて煩雑であると言わなければならない．証明は，基本的に次の3点である．

1. $A>B \Leftrightarrow A-B>0$
2. $A>0, B>0$のとき，$A^2>B^2 \Leftrightarrow A>B$
3. 相加・相乗平均の関係(ただし，この不等式は2で証明できる)

この不等式を扱う諸演習問題を解くにつけ，大変面倒臭いやり方であり，旧態依然であるように，私には思われる．しかし，確かに不等式の証明は，方程式に比べるとより数学的ではあり，論理的に展開させるのであるから，当然今後とも揺るぎない分野であることは言うまでもない．ただ，

「$\sqrt{5}-\sqrt{3}>\sqrt{8}-\sqrt{6}$ を証明せよ」の解答では，“数研出版の新制チャート式基礎からの数学A”は，

指針 にこう書いている．

> 直接平方すると $8-2\sqrt{15}$ と $14-2\sqrt{48}$ で大小不明，そこで，$\sqrt{5}+\sqrt{6}>\sqrt{8}+\sqrt{3}$ として平方，整数の部分がともに11となって消えるから，$\sqrt{30}$ と $\sqrt{34}$ の比較になって O.K.

私は，この問題がきわめて作為的であると思うのであるが，それにしてもどうして，$8-2\sqrt{15}$ と $14-2\sqrt{48}$ で大小不明，と書かなければならないのであろうか．数学を解く，ということは粘りが必要である．早々と退却をしてはいけない．この大小も解かれなければいけないのである．

以下に述べることは，まさに一歩進めた不等式の解法と考えていただきたい．

2．両不等式

〈定義〉

(i)　記号 $<>$ を両不等号という．$<$ を左不等号，$>$ を右不等号と呼ぶ．

(ii)　a と b の大小が分からないとき $a<>b$ と書き，この式を両不等式という．

計算の結果　$a<\not>b$ となったとき，左不等式が成り立つ

$a\not<>b$ となったとき，右不等式が成り立つ　と言う．

●基本性質

1. $a<>b$ と $b<>a$ は同値ではない．
2. $a<>a \Leftrightarrow a=a$
$a<>b$ かつ $b<>a \Leftrightarrow a=b$
3. $a<>b \Leftrightarrow a+c<>b+c,\ a-c<>b-c$
4. $a<>b$ かつ $c>0 \Rightarrow ac<>bc,\ \dfrac{a}{c}<>\dfrac{b}{c}$
5. $a>0, b>0$ のとき
(i)　$a<>b \Leftrightarrow a^2<>b^2$
一般に　(ii)　$a<>b \Leftrightarrow a^n<>b^n$

(注)　$a>0, b<0$ とすると $a<>b$ は自動的に $a\not<>b$ となる．

6. $a<>b$ かつ $c<>d \Rightarrow a+c<>b+d$
7. $a<>b$ かつ $c<>d \Leftrightarrow a-d<>b-c$
8. $a>0, b>0, c>0, d>0$ のとき
$a<>b, c<>d \Rightarrow ac<>bd$

(注)　両不等式の不等号の向きを変えるような操作を，絶対にしてはいけない．

〈規約〉

(iii)　$a<>b \Leftrightarrow a_1<>b_1 \Leftrightarrow a_2<>b_2 \Leftrightarrow \cdots\cdots \Leftrightarrow a_n<>b_n$ のとき

$a_n\not<>b_n \Rightarrow a\not<>b$　ie　$a>b$

$a_n<\not>b_n \Rightarrow a<\not>b$　ie　$a<b$

(iv)　A, Bは整式 or 分数式とする．

$A<>B \Leftrightarrow A_1<>B_1 \Leftrightarrow A_2<>B_2 \Leftrightarrow \cdots\cdots \Leftrightarrow A_n<>B_n$ のとき

$A_n=B_n=0 \Rightarrow A=B$ は恒等式である．

(注)　「$a<>b$ かつ $c<>d$」と言った場合，2つの両不等式の不等号の向きは同じものとする．したがって，例えば，$a<>b$ を変形して，$c<>d$ がでてきたとき，これに当たる．

3. 両不等式の応用

問題1　$\sqrt{3}+\sqrt{8}$ と $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ の大小を調べよ.

(解)　$\sqrt{3}+\sqrt{8}<>\sqrt{5}+\sqrt{6}$　…… ①

両辺平方して　$11+2\sqrt{24}<>11+2\sqrt{30}$

$\sqrt{24}<>\sqrt{30}$

$24<\not>30$　…… ②

②は，左不等式となるから，①の両不等式は左不等式となり

$\sqrt{3}+\sqrt{8}<\sqrt{5}+\sqrt{6}$

問題2　$2\sqrt{17}$ と $\dfrac{135}{2\sqrt{38}+\sqrt{17}}$ との大小を調べよ.

(解)　$2\sqrt{17}<>\dfrac{135}{2\sqrt{38}+\sqrt{17}}$

$2\sqrt{17}\,(2\sqrt{38}+\sqrt{17})<>135$

$4\sqrt{646}<>135-34$

$4\sqrt{646}<>101$

$16\cdot 646<>101^2$

$10336\not<>10201$

よって，$2\sqrt{17}>\dfrac{135}{2\sqrt{38}+\sqrt{17}}$

(注)　$2\sqrt{38}+\sqrt{17}$ を有理化すれば容易に解けるが，両不等式の特色を出すためにこのように解いた.

問題3　$\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}-7$ の正負を判定せよ.

(解)　$\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}-7<>0$　…… ①

両辺に $\sqrt[3]{2}$ (>0) を掛ける

$2+4\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2}<>0$　…… ②

①×7+②×4

$7\sqrt[3]{4}+28\sqrt[3]{2}-49<>0$　…… ①′

$8+16\sqrt[3]{4}-28\sqrt[3]{2}<>0$　…… ②′

①′+②′ 性質$\boxed{6}$より

$23\sqrt[3]{4}-41<>0$

$23\sqrt[3]{4}<>41$

$23^3\cdot 4<>41^3$

$48668<\not>68921$

よって，$\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}-7<0$

問題4　$k>0$ のとき，

$\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ を証明せよ.

(解)　$\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<>\sqrt{k+1}$　…… ①

両辺に $\sqrt{k+1}$ をかける.

$\sqrt{k(k+1)}+1<>k+1$

$\sqrt{k(k+1)}<>k$

$k(k+1)<>k^2$

$k>0$ より　$k+1<>k$

∴　$1\not<>0$　…… ②

②より，①は　$\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$

問題5　$a>0, b>0$ のとき，

$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を証明せよ.

(解)　両辺正であるから，

$\sqrt{a+b}<>\sqrt{a}+\sqrt{b}$ の両辺を平方する.

$a+b<>a+2\sqrt{ab}+b$

$0<\not>2\sqrt{ab}$

∴　$\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

〈性質〉

$\boxed{9}$　$a<>b$ かつ $b<>c \Rightarrow a<>c$

(証)　$a<>b$ かつ $-c<>-b$

辺々加えて　$a-c<>0$　∴　$a<>c$

$\boxed{10}$　$a>b$ のとき $a<>b+c \Rightarrow c_0<>c$

ただし，c_0 は $a=b+c_0$ を満たす.

(証)　$a=b+c_0$ より $a<>b+c$ に代入

$b+c_0<>b+c$　∴　$c_0<>c$

問題6　$k\geqq 2$ のとき，

$3^k>4k \Rightarrow 3^{k+1}>4(k+1)$ を証明せよ.

(解)　$3^k=4k+c_0$ とおく $(c_0>0)$

$3^{k+1}<>4(k+1)$　…… ①

$3\cdot 3^k<>4(k+1)$

$3(4k+c_0)<>4(k+1)$

$12k+3c_0<>4k+4$

$3c_0<>-8k+4$

$c_0<>-\dfrac{4}{3}(2k-1)$

$k\geqq 2$ より　$-\dfrac{4}{3}(2k-1)<0$

$c_0=3^k-4k>0$ であるから

$c_0\not<>-\dfrac{4}{3}(2k-1)$

①より　$3^{k+1}>4(k+1)$

●両不等式の解法

(例)　$2x+3<>5x-6$ を解け.

(解)　$2x+3<>5x-6$

$9<>3x$

∴　$3<>x$

(例)　$(x-1)(x-2)<>0$ を解け.

$x>1$ のとき

$x-2<>0$　∴　$x<>2$

$x<1$ のとき $x-1<0$ であるから

$0<>-(x-1)(x-2),\ -(x-1)>0$

$\therefore\ \ 0<>x-2\ \ \ \therefore\ \ 2<>x$

または　$x>2$ のとき $x<>1$

または　$x<2$ のとき $1<>x$

問題7　a, x, y は正数とすると，$\dfrac{x}{y}$ よりも $\dfrac{x+a}{y+a}$ のほうが1に近いことを証明せよ．

ただし，$x \neq y$ とする．

(解)　$\left|1-\dfrac{x}{y}\right|<>\left|1-\dfrac{x+a}{y+a}\right|$

$$\frac{|y-x|}{|y|}<>\frac{|y-x|}{|y+a|}$$

$|y-x|>0$ から $y>0, y+a>0$ であるから

$$\frac{1}{y}<>\frac{1}{y+a}$$

$\therefore\ \ y+a<>y$

$\therefore\ \ a\not<>0$

$\therefore\ \ \left|1-\dfrac{x}{y}\right|>\left|1-\dfrac{x+a}{y+a}\right|$

よって，$\dfrac{x+a}{y+a}$ のほうが1に近い．

(注)　この問題を模範解答するとすれば

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)^2-\left(1-\frac{x+a}{y+a}\right)^2$$
$$=\left(2-\frac{x}{y}-\frac{x+a}{y+a}\right)\left(\frac{x+a}{y+a}-\frac{x}{y}\right)$$
$$=\frac{2y^2+ay-ax-2xy}{y(y+a)}\cdot\frac{ay-ax}{y(y+a)}$$
$$=\frac{(2y+a)(y-x)^2a}{y^2(y+a)^2}>0$$

よって，$\dfrac{x+a}{y+a}$ のほうが1に近い．

〈性質〉

$\boxed{11}$　$a<>b+c \Rightarrow c_0<>c$

ただし，$a=b+c_0$ とする．

(証)　$a<>b+c$ に $b+c_0=a$ を辺々加える．

$a+b+c_0<>a+b+c$

$\therefore\ \ c_0<>c$

問題8　$\sqrt{3}-1$ と $2-\sqrt{2}$ の大小を調べよ．

(解)　$\sqrt{3}=1+\alpha,\ \sqrt{2}=1+\beta$

ただし，$0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$ とする．

$\sqrt{3}-1<>2-\sqrt{2}$

$1+\alpha-1<>2-(1+\beta)$

$\alpha<>1-\beta$

$\alpha+\beta<>1$

$\alpha=0.732\cdots,\ \beta=0.4192\cdots$

$\alpha+\beta=1.146\cdots$

$\therefore\ \ \alpha+\beta\not<>1$

$\therefore\ \ \sqrt{3}-1>2-\sqrt{2}$

〈性質〉(2数の大小は，次の性質から導かれている)

$\boxed{12}$　定義域 $x_1 \leqq x \leqq x_2$ において，関数 $y=f(x)$ が

(i)単調増加関数のとき

$a<>b \Leftrightarrow f(a)<>f(b)$

(ii)単調減少関数のとき

$a<>b \Leftrightarrow f(b)<>f(a)$

$\boxed{12}'$

(i) $a>1$ のとき　　$p<>q \Leftrightarrow a^p<>a^q$

$0<a<1$ のとき　$p<>q \Leftrightarrow a^q<>a^p$

(ii) $a>0, b>0, x>0$ のとき

$a<>b \Leftrightarrow a^x<>b^x$

(iii) $a>1$ のとき　　$x_1<>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<>\log_a x_2$

$0<a<1$ のとき　$x_1<>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_2<>\log_a x_1$

(iv) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$a<>b \Leftrightarrow \tan a<>\tan b$

$a<>b \Leftrightarrow \sin a<>\sin b$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき　$a<>b \Leftrightarrow \cos b<>\cos a$

問題9　(4TRIAL 数学Ⅱ *p*.46 例題 22)

(1)　$2\log_2 3, 3\log_4 3$ の大小を比較せよ．

(解)　$2\log_2 3<>3\log_4 3$

$\log_2 3^2<>\dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 27$

$2\log_2 9<>\log_2 27$

$\log_2 81<>\log_2 27$

$81\not<>27$

$\therefore\ \ 2\log_2 3>3\log_4 3$

(2)　$2^{30},\ 3^{20}$ の大小を比較せよ．

(解)　$2^{30}<>3^{20}$

$(2^{30})^{\frac{1}{10}}<>(3^{20})^{\frac{1}{10}}$

$2^3<>3^2$

$8<\not>9$

$2^{30}<3^{20}$

問題10　a, b を正の数とするとき，

a^ab^b と $(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ との大小を比較せよ．

(解)　$a^ab^b<>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

両辺を平方して $a^{2a}b^{2b}<>(ab)^{a+b}$

$a^{2a}b^{2b}<>a^{a+b}b^{a+b}$

$a^{a-b}<>b^{a-b}$　$\cdots\cdots(*)$

(i)　$a-b>0$　ie　$a>b$ のとき

　$(*)$から $a<>b$　$\therefore$　$a\cancel{<}>b$

　$\therefore$　$a^a b^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

(ii)　$a-b=0$　ie　$a=b$ のとき

　$a^a<>b^b$　　$\therefore$　$1<>1$

　よって $1=1$ となり $a^a b^b=(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

(iii)　$a-b<0$　ie　$a<b$ のとき

　$(*)$から $b<>a$　$\therefore$　$b\cancel{<}>a$

　$\therefore$　$a^a b^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

以上より　$a\neq b$ のとき　$a^a b^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

　　　　　$a=b$ のとき　$a^a b^b=(ab)^{\frac{a+b}{2}}$

4. おわりに

両不等式のような解き方をしている人を私は知らない．このような解き方があってもよいのではないかと思う．問題を1から8まで与え，両不等式の方法で解いた例を紹介したが如何であろう．今までの方法をA，両不等式をBとするならば，場合場合によって異なる．ときには，AとBの両方を適用した方がよいというのもある．ただ，高校生が，2数 $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ と $\sqrt{8}-\sqrt{6}$ の大小を調べよと言われたとき，単純に $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{8}-\sqrt{6})^2$ の計算では時間がかかり過ぎる場合がある．

不等式の証明で，$0<x<y, a>0$ とするとき $\dfrac{y}{x}$ と $\dfrac{y+a}{x+a}$ の大小は？と聞かれたとき，即

$$\frac{y}{x}-\frac{y+a}{x+a}=\frac{xy+ay-xy-ax}{x(x+a)}=\frac{a(y-x)}{x(x+a)}>0$$

$\therefore$　$\dfrac{y}{x}>\dfrac{y+a}{x+a}$

とするか，等式の計算のように

$$\frac{y}{x}<>\frac{y+a}{x+a}$$

$$\cancel{yx}+ay<>\cancel{xy}+ax$$

$$ay<>ax$$

$a>0$ より　$y\cancel{<}>x$

$\therefore$　$\dfrac{y}{x}>\dfrac{y+a}{x+a}$

とするかの違いなのである．

以上，私の考えを述べた．不備な点，矛盾点などがあった場合はどうかご指摘をお願いしたい．

〈参考文献〉

数研出版　新制チャート式基礎からの数学A

数研出版　4TRIAL 数学Ⅱ

（長崎県立大村高等学校）