3次方程式と三角関数は親せき？

龍山（たつやま） 一郎（いちろう）

はじめに

三角関数は三角形の3辺の比の値によって求められている．例えば，三角形の底辺と斜辺の比は「余弦」であり，$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ と簡単に値を求めることができるが，このようにして求めることができる値も限られており，他の値については，マクローリンの定理により，$\cos x$ を x の巾級数の和に展開して求めている．

$\cos 20^\circ$をこの方法で求めてみると

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\cdots \quad ①$$

ここで，x は弧度法 x であるので，60分法 a° に換算すると

$$x = \frac{a\pi}{180} = a \times 0.017453292519\cdots\cdots$$

$a = 20^\circ$ より $x \fallingdotseq 0.34906584$

これを①に代入すると

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ &= 1 - \frac{0.121846961}{2!} + \frac{0.0148466818}{4!} \\ &\quad - \frac{0.00180902306}{6!} + \frac{0.00022042396}{8!} - \cdots \\ &= 1 - 0.0609234803 \\ &\qquad + 0.0006818611743 \\ &\qquad - 0.00000251253202 \\ &\qquad + 0.00000000546686411\cdots\cdots \\ &= 0.939692624\cdots\cdots\end{aligned}$$

となり，三角関数の余弦の値を求めたような感じがしないので，三角関数らしい値の求め方を次の順序で述べてみたい．

Ⅰ．3次方程式の解法について

3次方程式 $X^3 + aX^2 + bX + C = 0$ に $X = x - \frac{a}{3}$ を代入し，$x^3 + 3mx + 2n = 0$ の形にする．

ここで，$m = -1, n = -\cos 3\theta$ とおくと

$$x^3 - 3x - 2\cos 3\theta = 0$$

$$\therefore \quad x^3 - 3x - 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 0$$

これを因数分解すると

$$(x - 2\cos\theta)\{x + 2\cos(60^\circ - \theta)\}\{x + 2\cos(60^\circ + \theta)\} = 0$$

となり，3次方程式 $x^3 - 3x - 2\cos 3\theta = 0$ の解は

$x = 2\cos\theta, -2\cos(60^\circ - \theta), -2\cos(60^\circ + \theta)$ となる．

具体的な値として，$\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ $(3\theta = 60^\circ)$ のとき，

$x^3 - 3x - 1 = 0$ の解は

$x = 2\cos 20^\circ$，$-2\cos 40^\circ$，$-2\cos 80^\circ$ となる．

ここで，3次方程式の「解と係数の関係」より

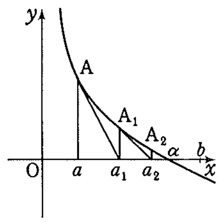
$$2\cos 20^\circ + (-2\cos 40^\circ) + (-2\cos 80^\circ) = 0$$

$$\begin{aligned}&2\cos 20^\circ(-2\cos 40^\circ) + (-2\cos 40^\circ)(-2\cos 80^\circ) \\ &\quad + (-2\cos 80^\circ)(2\cos 20^\circ) = -3\end{aligned}$$

$$2\cos 20^\circ(-2\cos 40^\circ)(-2\cos 80^\circ) = 1$$

で，いずれも整数となるから，$\cos 20^\circ$の真の値を根号(2重，3重，……)を使って表そうと試みたが求めることができなかったので，この3次方程式の解を次の方法で近似値を求めることにする．

Ⅱ．方程式の近似解法(ニュートン法)について



右図のように区間$[a, b]$において，$y = f(x)$ の x 軸の交点αが存在するとき，点$\mathrm{A}(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を，$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ とする．

これが，x 軸と交わる点の x 座標を a_1 とすれば

$$y = 0 \text{ より } \quad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

ところで $f'(a) < 0, f(a) > 0$ より $a_1 > a$

また，区間$[a, b]$で，$f''(x) > 0$ であるから，$f(a_1) > 0$ よって，$a_1 < \alpha$ から a_1 は a より α に近い．

次に，$x = a_1$ における曲線上の点 $\mathrm{A}_1(a_1, f(a_1))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_2 とすれば，$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$ で $a_1 < a_2 < \alpha$ となる．

同様にして，次第にαに近い値が得られ，しかもαを越えないから，一定の極限値に収束する．

この極限値αが方程式$f(x)=0$の解である．

ここで，3次方程式$x^3-3x+\mathrm{P}=0$の解を近似解法(ニュートン法)で，コンピュータによる計算で求めるとそのプログラムは次の通りである．

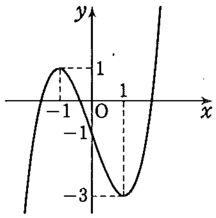
```
100 E#=1E-12
110 INPUT "P=" ; P
120 LPRINT "P=" ; P
130 INPUT "X=" ; X# : T#=X#
140   K3=1 : K2=0 : K1=-3 : K0=P
150   FX#=(K3*X#^3)+(K2*X#^2)+(K1*X#)+K0
160     DX#=(3*K3*X#^2)+(2*K2*X#)+K1
170     IF DX#=0 THEN LPRINT "X=" ; T# ; "ノトキ" ;
180     IF DX#=0 THEN LPRINT "分母が0です"
                                        : GOTO 130
190     A#=X#-(FX#/DX#)
200     IF ABS(A#-X#)<E# THEN GOTO 230
210     X#=A#
220 GOTO 150
230 LPRINT "X=" ; T# ; "ノトキ" ; A#
240 GOTO 130
```

P＝−1を代入すると

$y=x^3-3x-1$(右図)

のx軸との交点が，方程式

$x^3-3x-1=0$の解となり，



$X=2$のとき

1.879385241571817

$X=0$のとき　−0.3472963553338607

$X=-2$のとき　−1.5320888862379567より

$\cos 20^\circ=0.93969260785909$

$\cos 40^\circ=0.766144443118978$

$\cos 80^\circ=0.173648177666930$

となり，余弦の近似値を求めることができる．

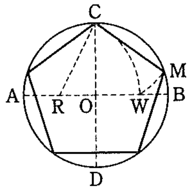
このことより，$\mathrm{P}=-2\cos 3\theta$の値を代入すれば，$2\cos\theta$，$2\cos(60^\circ-\theta)$，$2\cos(60^\circ+\theta)$の近似値を求めることができるから，$\cos 3\theta$の真の値を求めればよい．

Ⅲ. cos3θ（θ：正の整数）の値について

1). 円に内接する正多角形について

円周等分問題として，定規とコンパスで作図可能な円に内接する正多角形で，中心角が正の整数であるのは，3，4，5，6，8，10，12，15，20，24，30，40，60，120の14通りであり，ここでは，このうち，正5角形と正10角形の描き方を述べ，他の描き方については，その中で簡単に説明する．

[正5角形の描き方]



円Oにおいて，直交する直径をAB，CDとする．線分AOの中点RとCを結び，RC＝RWとなる点をAB上に求め，Cを中心として，CW＝CMとなる点を円O上に求める．そして，CMを1辺として，それぞれの点を結べば，正5角形である．

1．正5角形の解法(中心角72°)

点Mは，中心(0, 2)，半径$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$の円と中心(0, 0)半径2の円との交点より，これを解くと

$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$となる．

次に△OCMにおいて，余弦定理より

$$\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-2\right)^2$$
$$=2^2+2^2-2\times2\times2\cos72^\circ$$

$$\therefore\quad \cos72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

[正20角形の描き方]

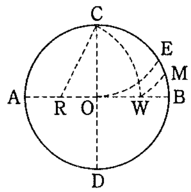
正5角形の描き方より，辺BMを1辺とし，それぞれの点を結べば，正20角形である．

2．正20角形の解法(中心角18°)

△OBMにおいて，余弦定理より求めると

$$\cos18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

[正30角形の描き方]

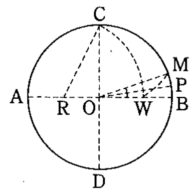


正5角形の描き方より，Cを中心として，半径COと円周との交点Eをとる．このEMを1辺として，それぞれの点を結べば，正30角形である．

3．正30角形の解法(中心角12°)

点E($\sqrt{3}$, 1)より，△OMEにおいて，余弦定理より求めると　$\cos12^\circ=\dfrac{\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}}{4}$

[正40角形の描き方]



正5角形の描き方より，∠BOMの2等分線と円Oとの交点Pをとり，このBPを1辺とし，それぞれの点を結べば，正40角形である．

4．正40角形の解法(中心角9°)

線分MBの中点をZとし，直線OZと円Oとの交点

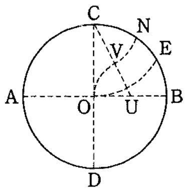
をPとすると

$P\left(\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2},\ \dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2}\right)$である.

次に，△OBPにおいて，余弦定理より求めると

$$\cos 9^\circ=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$$

[正10角形の描き方]



円Oにおいて，直交する直径をAB，CDとする．線分OBの中点Uと点Cを結び，点Uを中心として半径UOの弧を描き，線分CUとの交点をVとする．次に点Cを中心とし，半径CVの弧を解き，円周との交点をNとする．このCNを１辺としそれぞれの点を結べば正10角形である．

5．正10角形の解法（中心角36°）

点Nは，中心$(0,2)$，半径$\sqrt{5}-1$の円と中心$(0,0)$半径２の円との交点より，これを解くと

$N\left(\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$となる.

次に，△OCNにおいて，余弦定理より求めると

$$\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

[正15角形の描き方]

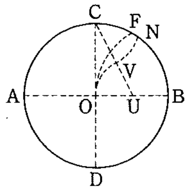
正10角形の描き方より，同じく点Cを中心として，半径COの弧を描き，円周との交点をEとする．このNEを１辺とし，それぞれの点を結べば，正15角形である．

6．正15角形の解法（中心角24°）

△OENにおいて，余弦定理より求めると

$$\cos 24^\circ=\frac{\sqrt{9-\sqrt{5}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}}{4}$$

[正60角形の描き方]



正10角形の描き方より，Bを中心とし半径BOの弧を描き，円周との交点をFとする．このNFを１辺とし，それぞれの点を結べば，正60角形である．

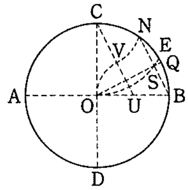
7．正60角形の解法（中心角6°）

点$F(1,\sqrt{3})$より，△ONFにおいて，余弦定理より求めると　$\cos 6^\circ=\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}}{4}$

[正120角形の描き方]

正10角形の描き方より，∠BONの２等分線と円Oとの交点Qをとり，このEQを１辺とし，それぞれの点を結べば，正120角形である．

8．正120角形の解法（中心角3°）



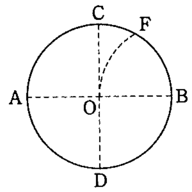
線分NBの中点をSとし，直線OSと円Oとの交点をQとすると

$Q\left(\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{2},\ \dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{2}\right)$である.

次に，△OEQにおいて，余弦定理より求めると

$$\cos 3^\circ=\frac{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$$

[正12角形の描き方]

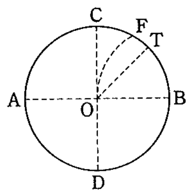


点Bを中心とし，半径BOの弧を描き，円周との交点をF，このCFを１辺とし，それぞれの点を結べば，正12角形で，BFを１辺として，それぞれの点を結べば，正６角形である.

9．正12角形の解法（中心角30°）

点$F(1,\sqrt{3})$より　$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

[正24角形の描き方]

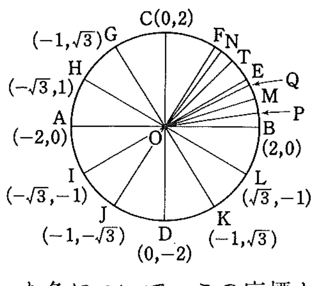


正12角形の描き方より，∠BOCの２等分線と円周との交点をTとする．このFTを１辺として，それぞれの点を結べば，正24角形であり，BTを１辺として，それぞれの点を結べば，正８角形である．

10．正24角形の解法（中心角15°）

点$T(\sqrt{2},\sqrt{2})$より，△OTFについて，余弦定理より求めると$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　また　$\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2)．その他の角について



1～10までの正多角形の解法で求めた座標で，余弦の値を求めた．その座標をまとめると，右の表のようになる．これにより，正多角形の内角より求められなかった角について，この座標より，１辺の長さをa，求める角の大きさをα°とすると

$a^2=2^2+2^2-2\times2\times2\cos\alpha^\circ$より

$\cos\alpha^\circ=\dfrac{1}{8}\{8-a^2\}$　となる.

1. 正40角形($\angle BOP=9^\circ$)

$$P\left(\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2},\ \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2}\right)$$ より，

21°，51°，81°，39°，69°を求める．

(1) $\angle POE=21^\circ$

$$EP^2=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2}\right)^2$$

$$=8-\sqrt{3(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}})}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\therefore \cos 21^\circ=\frac{1}{8}\left\{\sqrt{3(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}})}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$$

(2) $\angle POF=51^\circ$ より

$$\cos 51^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$$

(3) $\angle POC=81^\circ$ より

$$\cos 81^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$$

(4) $\angle POL=39^\circ$ より

$$\cos 39^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$$

(5) $\angle POK=69^\circ$ より

$$\cos 69^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$$

2．正20角形($\angle MOB=18^\circ$)

$$M\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$ より，42°，48°，78°を求める．

(6) $\angle MOF=42^\circ$ より

$$\cos 42^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}\right\}$$

(7) $\angle MOL=48^\circ$ より

$$\cos 48^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{9+\sqrt{5}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}\right\}$$

(8) $\angle MOK=78^\circ$ より

$$\cos 78^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}\right\}$$

3．正15角形($\angle ROE=24^\circ$)

$$R\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$ より，54°，84°，66°を求める．

(9) $\angle ROB=54^\circ$ より

$$\cos 54^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

(10) $\angle ROL=84^\circ$ より

$$\cos 84^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{9-\sqrt{5}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}\right\}$$

(11) $\angle ROG=66^\circ$ より

$$\cos 66^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}\right\}$$

4．正120角形($\angle QOE=3^\circ$)

$$Q\left(\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{2},\ \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{2}\right)$$ より，

27°，57°，87°，33°，63°を求める．

(12) $\angle QOB=27^\circ$ より

$$\cos 27^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right\}$$

(13) $\angle QOL=57^\circ$ より

$$\cos 57^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

(14) $\angle QOK=87^\circ$ より

$$\cos 87^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

(15) $\angle QOF=33^\circ$ より

$$\cos 33^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

(16) $\angle QOC=63^\circ$ より

$$\cos 63^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right\}$$

5．正8角形($\angle TOB=45^\circ$)

$T(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ より 75°を求める．

(17) $\angle TOL=75^\circ$ より

$$\cos 75^\circ=\frac{1}{4}\left\{\sqrt{6}-\sqrt{2}\right\}$$

これ以外に，正三角形，正四角形があるが，中心角も90°以上，描き方も一般的であるので省略する．

Ⅳ. cos3θ（θ：正の整数）以外の値について

例えば，中心角1°の正多角形は正360角形である．このように考えると，中心角が正の整数で前記以外に，9, 18, 36, 72, 90, 180, 360の7通りあるが，作図不能であるので，cos3θ以外の値を求めることができない．これは円周等分問題として，正多角形が作図可能か作図不能であるかは，次の定理で説明されている．

n ＼ a	0	1	2	3	4
2^a			4	8	16
$2^a\times3$	3	6	12	24	48
$2^a\times5$	5	10	20	40	80
$2^a\times3\times5$	15	30	60	120	240
$2^a\times17$	17	34	68	136	272
$2^a\times3\times17$	51	102	204		
$2^a\times5\times17$	85	170			
$2^a\times3\times5\times17$	255				

[定理]正数 n が $2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_k$ の形に素因数分解され，p_1，p_2，$p_3, \cdots\cdots$，p_k が皆相異なるフェルマーの素数($2^{2^k}+1$となる形)であるならば，円に内接する正 n 角形の作図は可能で，その他の n に対しては作図不能である．

具体的に，$n=2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ の値は前の表の通りである．この表には，$n=9, 18, 36, \cdots\cdots$ の数値はないので，作図不能である．これは定規とコンパスで角の2等分は作図が可能であるが，直角以外の角の3等分は作図不能からきている．

ところが，正多角形の作図の中に正16角形と正17角形の作図は，中心角が整数でなかったので，含めなかったが，この定理より作図可能となっている．

[正16角形の描き方]

正8角形の描き方より，∠TOBの2等分線と円周との交点と点Bを結びそれを1辺として，それぞれの点を結べば，正16角形である．[図は略]

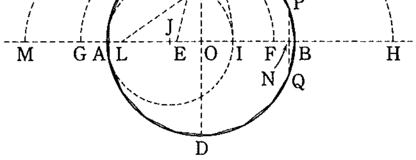
正16角形の解法(中心角 22.5°)

円との交点の座標は$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$より

$$\cos\frac{360^\circ}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

[正17角形の描き方]

円Oを中心とし，直交する直径をそれぞれAB，CDとする．次に$OE=\frac{1}{4}OA$となる点Eをとり，直線AB上に CE＝EF＝EG，CF＝FH，CG＝GI となる点G，H，Iをとる．またAIの中点Jを中心とし，半径JIの円をかき，OCとの交点をK，$KL=\frac{1}{2}OH$ となる点をAO上にとり，Lとし，LKを半径としてOAの延長上にMを，そして，$ON=\frac{1}{2}OM$ をとり，ON⊥PQ となる点を円周上にP，Qをとる．このBPを1辺として，それぞれの点を結べば，正17角形である．



正17角形の解法(中心角約 21.2°)

△OBPにおいて，余弦定理より求める．

$$\cos\frac{360^\circ}{17}=\frac{1}{16}\left\{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right\}$$
$$+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(\sqrt{17}-1)\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$
$$=0.932472229393\cdots\cdots$$

V．まとめ

$\cos 3\theta$(θ：正の整数)は，真の値を，それ以外は真の値を求めることができないので，3次方程式 $x^3-3x-2\cos 3\theta=0$ の3つの解が

$$x=2\cos\theta,\ -2\cos(60^\circ-\theta),\ -2\cos(60^\circ+\theta)$$

に着目し，$0^\circ \leqq 3\theta \leqq 90^\circ$ のとき，

$0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ$，$30^\circ \leqq 60-\theta \leqq 60^\circ$，$60^\circ \leqq 60+\theta \leqq 90^\circ$

となり，次の表から，0°から90°までの余弦の近似値を，方程式の近似解法(ニュートン法)より求めることができる．

おわりに

この表から，3次方程式を解くことにより，余弦の近似値を求めることができたが，近似値はあくまでも近似値である．

そこで，$2\cos 20^\circ$は3次方程式 $x^3-3x-1=0$ の1つの解であるから，$x^3-3x-1=0$ をカルダーノの解法より解くと，$2\cos 20^\circ=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}$ となり，虚数単位 i を含んでいるので，みかけ上は複素数のようであるが，実数である．

この実数化，すなわち真の値を求めることが，私の夢であるが，実現の可能性はうすい．もしできれば，更に，10°，40°，50°，70°，80°の真の値を求めることができるのである．

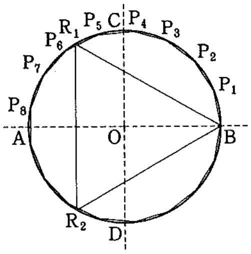
3θ	$\cos 3\theta$ の真数	θ	$60^\circ-\theta$	$60^\circ+\theta$
3°	$\frac{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$	1°	59°	61°
6°	$\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}}{4}$	2°	58°	62°
9°	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	3°	57°	63°
12°	$\frac{\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}}{4}$	4°	56°	64°
15°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	5°	55°	65°
18°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	6°	54°	66°
21°	$\frac{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	7°	53°	67°
24°	$\frac{\sqrt{9-\sqrt{5}+\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}}{4}$	8°	52°	68°
27°	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$	9°	51°	69°
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	10°	50°	70°
33°	$\frac{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$	11°	49°	71°
36°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	12°	48°	72°
39°	$\frac{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	13°	47°	73°
42°	$\frac{\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}}{4}$	14°	46°	74°
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	15°	45°	75°
48°	$\frac{\sqrt{9+\sqrt{5}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}}{4}$	16°	44°	76°
51°	$\frac{\sqrt{8+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	17°	43°	77°
54°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	18°	42°	78°
57°	$\frac{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$	19°	41°	79°
60°	$\frac{1}{2}$	20°	40°	80°
63°	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$	21°	39°	81°
66°	$\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}}{4}$	22°	38°	82°
69°	$\frac{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	23°	37°	83°
72°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	24°	36°	84°
75°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	25°	35°	85°
78°	$\frac{\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}}}{4}$	26°	34°	86°
81°	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	27°	33°	87°
84°	$\frac{\sqrt{9-\sqrt{5}-\sqrt{3(10+2\sqrt{5})}}}{4}$	28°	32°	88°
87°	$\frac{\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$	29°	31°	89°
90°	0	30°	30°	90°

[付]正51角形と正85角形の描き方

フェルマーの定理から定規とコンパスにより，正51角形と正85角形の作図が可能となっているので，簡単に示すと

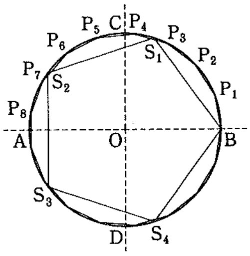
1．正51角形

円Oに正17角形と正3角形を描き，辺P_6R_1を1辺として，それぞれの辺を結ぶ．



2．正85角形

円Oに正17角形と正5角形を描き，辺P_7S_2を1辺として，それぞれの辺を結ぶ．



（前 大分県立国東高等学校）