拡大・縮小，平行移動された関数

坂本　茂（さかもと　しげる）

高等学校での関数のグラフは

$$y=x^2,\ y=\frac{1}{x},\ y=\sin x,\ y=\log x$$

などが基になっていて，これらを複雑にした

$$y=3x^2,\ y=\frac{2x}{x+1},\ y=3\sin(2x+180^\circ),$$
$$y=2+\log(x+1)$$

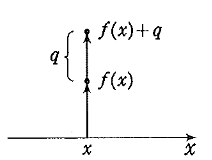
などの関数のグラフを描かせているが，初め生徒は難しさを感じる．

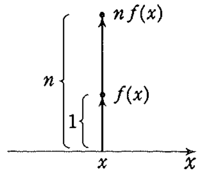
1年生は $y=2x^2-4x+5$ を $y=2(x-1)^2+3$ と変形できたとしても，これがなぜ $y=2x^2$ を y 軸方向に3の平行移動なのに x 軸方向には1の移動なのか釈然としないでいる生徒がいる．また2年生の三角関数では $y=3\sin x$ あるいは $y=3\sin(x-180^\circ)$ は分かるようだが $y=\sin 3x$, $y=\sin(3x+180^\circ)$ となると理解できていない生徒がかなりいる．先だって2年生の授業で，関数 $y=f(x)$ を基にした込み入った関数のグラフについてまとめたら生徒は真剣に聴いてくれた．以下は複数のクラスで行なった講義内容を整理したものである．

1．縦軸方向と横軸方向を別に考える場合

(1)　y 軸方向の拡大縮小と平行移動

例えば $y=x^2$, $y=\sin x$ などを y 軸方向に2倍することは $y=2x^2$, $y=2\sin x$ として，また y 軸方向に3だけもち上げたものは $y=x^2+3$, $y=\sin x+3$ として容易に理解される．y 軸方向の拡大縮小と平行移動はどの生徒にも分かるのである．すなわち $y=f(x)$ を y 軸方向に n 倍すれば $y=nf(x)$ であり，y 軸方向に q 移動させれば $y=f(x)+q$ である．





(2)　x 軸方向の拡大縮小と平行移動

①　逆関数を用いての説明

問題は x 軸方向の拡大縮小，平行移動である．同じように考えるには逆関数 $x=f^{-1}(y)$ を用いるとよい．幸い逆関数は生徒にも難しくはないようである．すると，x 軸方向に m 倍すれば $x=mf^{-1}(y)$ で，x 軸方向に p 平行移動させれば $x=f^{-1}(y)+p$ となる．

それぞれ $\dfrac{x}{m}=f^{-1}(y)$, $x-p=f^{-1}(y)$ であり逆関数を使わず書けば，x 軸方向の拡大縮小と平行移動が

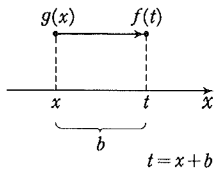
$$y=f\left(\frac{x}{m}\right),\ y=f(x-p)$$

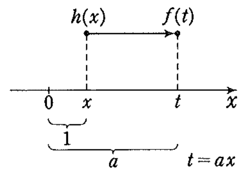
と表されることが理解できる．

しかし，逆関数は定義できないことがある．

②　横軸上での説明

$g(x)=f(x+b)$ とすると $f(x)$ は $g(x)$ を横軸に b 移動したものである．また $h(x)=f(ax)$ とすると $f(x)$ は $h(x)$ を横軸方向に a 倍したものである．したがって $f(x)$ を横軸に p 平行移動した関数と，$f(x)$ を横軸方向に m 倍した関数はそれぞれ $f(x-p)$, $f\left(\dfrac{x}{m}\right)$ である．$\left(p=-b,\ m=\dfrac{1}{a}\right)$





これは明快な説明であり教科書でもこの考えによっているが，解説に苦労しており生徒が理解し難い所である．

これによると $y=\sin x$ を x 軸方向に2倍したものと，x 軸方向に 180° 平行移動したものはそれぞれ

$$y=\sin\frac{x}{2},\ y=\sin(x-180^\circ)\ である．$$

2．両軸方向を統一的に考える場合

関数 $y=f(x)$ は x が独立変数，y が従属変数という立場から，別々に扱われたわけである．これは xy 平面上のグラフ，あるいは陰関数 $F(x,y)=0$ として両軸方向に対して同じように扱えれば分かりやすいだろう．

[Ⅰ] 座標軸方向への拡大および縮小

毎年 $y=\sin 2x$ のグラフを描かせるのに少なからず苦労する．一般に関数 $y=f(x)$ を x 軸の正の方向に m 倍，y 軸の正の方向に n 倍した関数の方程式における x, y はそれぞれを $\dfrac{x}{m}$，$\dfrac{y}{n}$ に縮めてしまえば元の $y=f(x)$ の式における x, y を満足するはずであるから，次のようになる．

$$\frac{y}{n}=f\left(\frac{x}{m}\right)\ (m, n \fallingdotseq 0)$$

すなわち $y=nf\left(\dfrac{x}{m}\right)$ となる．このことから $y=\sin x$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 拡大したグラフの式が $y=3\sin\dfrac{x}{2}$ であることが分かる．また m, n が負のときはそれぞれの軸に対し線対称を意味し，絶対値が 1 より小のときは縮小を意味している．$y=x^2$ の例では x 軸方向に m 倍することは y 軸方向に m^2 分の 1 に縮小することであり，y 軸方向に n 倍することは x 軸方向に $\sqrt{n}$ 分の 1 に縮小することと同じである．

[Ⅱ] 平行移動

関数 $y=f(x)$ を x 軸の正方向に p，y 軸の正方向に q だけ平行移動した関数の方程式における x, y は，それぞれを $x-p$，$y-q$ とすればもとの式 $y=f(x)$ の x, y を満足するはずであるから，平行移動したグラフの式は次のようになる．

$$y-q=f(x-p)$$

すなわち $y=f(x-p)+q$ なのである．先程の 1 年生に理解されなかった 2 次関数 $y=2(x-1)^2+3$ のグラフでは $y-3=2(x-1)^2$ であるから x 軸方向，y 軸方向の移動が同じように理解されよう．指数関数 $y=2^x$ を x 軸方向に 1 平行移動すると $y=2^{x-1}$ であるから $2y=2^x$ と書けて y 軸方向に対して 2 分の 1 に縮小したのと同じことが示される．

関数 $y=f(x)$ において [Ⅰ]座標軸方向の拡大に引き続き，[Ⅱ]平行移動が行われると

$$\frac{y-p}{n}=f\left(\frac{x-q}{m}\right)$$ となるから

$$y=nf\left(\frac{x-q}{m}\right)+p$$

となる．ここで，[Ⅰ][Ⅱ]の順序を替えると異なるものとなるので注意を要する．三角関数 $y=\sin x$ では

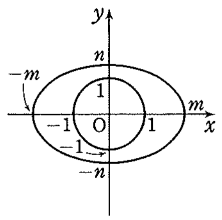
$$y=n\sin\frac{1}{m}(x-p)+q$$

2 次関数 $y=x^2$ では x 軸方向の拡大は考える必要はなく $m=1$ として

$$y=n(x-p)^2+q$$

となる．

生徒が分かりにくく思うことは，拡大縮小にせよ平行移動にせよ x 軸方向と y 軸方向の取り扱いが違ってみえることである．上記の説明では x 軸，y 軸方向で扱いは同じである．これはグラフの式を $F(x,y)=0$ と書くことによりいっそう明確となる．



円 $x^2+y^2=1$ を x 軸，y 軸それぞれの方向に m, n 倍すれば $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ となり楕円である．拡大縮小および平行移動はそれぞれ

$$[\text{Ⅰ}]\ F\left(\frac{x}{m},\ \frac{y}{n}\right)=0 \qquad [\text{Ⅱ}]\ F(x-p,\ y-q)=0$$

と書かれ，[Ⅰ]のあとに[Ⅱ]を行えば次のようになる．

$$F\left(\frac{x-p}{m},\ \frac{y-q}{n}\right)=0$$

一般に $a, b \fallingdotseq 0$ のとき関数 $F(ax+b, cy+d)=0$ のグラフは $m=\dfrac{1}{a}$，$n=\dfrac{1}{b}$，$p=-\dfrac{b}{a}$，$q=-\dfrac{d}{c}$ とおけるから $F(x,y)=0$ を座標軸方向に拡大縮小と平行移動を施したものである．

$a, b \fallingdotseq 1$ の場合は平行移動なしでも考えられる．直線 $x=p$, $y=q$ を中心に座標軸方向にそれぞれ m, n 倍したものは，次のようになるからである．

$$F\left(\frac{x-(1-m)p}{m},\ \frac{y-(1-n)q}{n}\right)=0$$

$m=n$ の場合は点 (p,q) を中心とした相似図形である．$y=ax^2$ は $ay=(ax)^2$ であるから $m=n$ と考えられ，すべての放物線は相似である．

（東京都立新宿高等学校）