自然数の平方の和 $S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2$ について

加藤（かとう）　政仁（まさひと）

はじめに

自然数の平方の和を導く方法として高校教科書で採用されているものは，次の恒等式を利用している．

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

ここで $k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$ とおいて辺々加えれば求められるという方法である．これは自然数の 1 から n までの和 $S_1=\sum_{k=1}^{n}k$ を既知として自然数の平方の和を求めている．このような逐次的な方法によって一般の自然数のべき和 S_n を求めることも可能だが，ここでは自然数の平方の和 S_2 をこの恒等式の利用以外の方法で逐次的に求めることを考える．

またこの逐次的方法とは別に直接的に S_2 あるいは一般に S_n を求めることができる．その概略はおよそ次のようなものである．

関数 $f(x)=x^n$ に対して

$$F(x+1)-F(x)=f(x)$$

を満たすような R 係数多項式 $F(x)$ が求まれば

$$f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)=F(n+1)-F(1)$$

から直接的に S_n を求めることができる．

この直接的方法として和分と差分の利用と Bernoulli の多項式の利用が有効である．

1 逐次的解法

① 自然数の 1 から n までの和 R_n の値と自然数の 1 から n までの平方の和 P_n の比の規則性に注目する．

$$R_n=1+2+\cdots\cdots+n$$

$$P_n=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2$$

$$\frac{P_1}{R_1}=\frac{1^2}{1}=\frac{3}{3}$$

$$\frac{P_2}{R_2}=\frac{1^2+2^2}{1+2}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{P_3}{R_3}=\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3}=\frac{7}{3}$$

$$\vdots$$

一般に $\frac{P_n}{R_n}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}=\frac{2n+1}{3}$ と推定できる．

これを数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のとき　明らかに成り立つ．

$n=k$ のとき成り立つとすると

$$P_k=\frac{2k+1}{3}R_k\ \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{P_{k+1}}{R_{k+1}}-\frac{P_k}{R_k}=\frac{P_k+(k+1)^2}{R_k+(k+1)}-\frac{P_k}{R_k}$$

$$=\frac{R_k(k+1)^2-P_k(k+1)}{R_k(R_k+k+1)}$$

ここで(1)を代入すれば

$$\frac{P_{k+1}}{R_{k+1}}-\frac{P_k}{R_k}=\frac{(k+1)(k+2)}{3(R_k+k+1)}$$

$R_k=1+2+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ は既知．

よって $\frac{P_{k+1}}{R_{k+1}}-\frac{P_k}{R_k}=\frac{2}{3}$

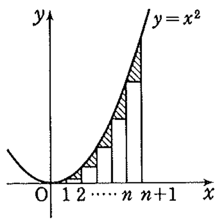
$$\therefore\quad \frac{P_{k+1}}{R_{k+1}}=\frac{2}{3}+\frac{P_k}{R_k}=\frac{2}{3}+\frac{2k+1}{3}=\frac{2(k+1)+1}{3}$$

すなわち $n=k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに $P_n=\frac{2n+1}{3}R_n$ から自然数の平方和が求まる．

② 積分を利用して下の図の長方形の面積の和を求める．

関数 $y=x^2$ の $x=1$ から $x=n+1$ までの下の面積から図の斜線部分の面積を引けばよい．これも自然数の和 S_1 を既知として計算していけば求められる．



$$S_2=\int_1^{n+1}x^2dx-\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}(x^2-k^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_1^{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_k^{k+1}-k^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}n(n^2+3n+3)-\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{3}n$$

$$=\frac{1}{3}n(n^2+2n+3)-S_1$$

同様にS_1, S_2を既知として関数$y=x^3$を積分すればS_3を逐次求めることもできる.

③ 関数$f(x)=x+2x^2+\cdots\cdots+nx^n$において$x=1$における微分係数$f'(1)$を求めれば，それが自然数の平方の和$S_2$になる.

そこで

$$g(x)=x+x^2+\cdots\cdots+x^n=\frac{x(1-x^n)}{1-x}$$

とおくと

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{k}x^m+f(x)=n\cdot g(x)=\frac{nx(1-x^n)}{1-x}$$

が成り立つ.

上式の両辺をxで微分すると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{k}m\cdot x^{m-1}+f'(x)$$

$$=\frac{n[\{1-(n+1)x^n\}(1-x)+x(1-x^n)]}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{n(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n)}{1-x}$$

$$=n(1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1})$$

ここで$S_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$を既知として$x=1$を代入する.

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}+f'(1)=n(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

ここで

$S_2=f'(1)=\sum_{k=1}^{n}k^2$だが，上式の両辺に$\dfrac{n(n+1)}{2}$を加えれば

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)^2}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)}{4}$$

$$\therefore\quad S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

④ 自然数の数列$a_k=k$に対して$P_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

とおくと$P_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k$

P_nが求められるとS_2を求めることができる.

ここで$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m+P_n=(n+2)\sum_{k=1}^{n}a_k$が成り立つ.

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=(n+2)\sum_{k=1}^{n+1}k$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore\quad P_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ここからS_2を求めることができる.

これを一般化して$a_k=k(k+1)\cdots\cdots(k+m-1)$とおくとき

$$和\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots\cdots(k+m-1)$$

$$=\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+m)}{2n+1}$$

を数学的帰納法で証明できる．これを用いればS_3, S_4などを計算によって求めることができる.

② 直接的解法

① 階乗関数を導入してそれに和分と差分の理論を適用すれば直接的に自然数のべき和を求めることができる.

定義1　区間$[0,\infty]$で定義された実数値関数

$u\in \mathrm{F}$に対して

$$(\delta u)(t)=u(t+1)-u(t)$$

をtにおける1階差分という.

特に数列$\{u_k\}$に対して

$u(t)=u_{[t]}$とおくことによって

$$(\delta u)(k)=u_{k+1}-u_k,\quad {}^{\forall}u\in \mathrm{F}$$

ここでδを差分演算子という.

定義2　階乗関数を次のように定義する.

$t^{(0)}=1$

$t^{(n)}=t(t-1)(t-2)\cdots\cdots(t-n+1)$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

定義3　$u,U\in \mathrm{F}$に対して

$(\delta U)(t)=u(t)$のときUをuの和分という.

$\delta U_1=\delta U_2$すなわち$\delta(U_1-U_2)=0$のとき

$\pi=U_1-U_2$とおけば

$$(\delta\pi)(t)=\pi(t+1)-\pi(t)=0$$

$\therefore$　$\pi(t+1)=\pi(t)$ (πは周期1の関数)

逆に周期1の任意の関数πに対して$U+\pi$はuの和分の1つとなる.

したがって$K=\{\pi\in \mathrm{F}\mid(\delta\pi)(t)=0\}$とすると

uの1つの和分Uに対してuの和分全体は,

$$(\delta^{-1}u)(t)=U(t)+K$$

で表される.

特に階乗関数$t^{(n)}$について

$$\delta t^{(n)}=nt^{(n-1)}$$

が成り立つから

$$\delta^{-1}t^{(n)}=\frac{1}{n+1}t^{(n+1)}+K\ \cdots\cdots(2)$$

いま，数列 $u_{[t]}=u(t)$ の１つの和分を U とすると

$$(\delta U)(t)=u(t)=u_{[t]}$$

$\therefore\quad U(t+1)-U(t)=u_{[t]}$

ゆえに，数列 $\{u_k\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\{U(k+1)-U(k)\}=U(n+1)-U(1)$$

いま，(2) から数列 $u_k=(k+1)k=(k+1)^{(2)}$ とすれば

$$\begin{aligned}S_1&=\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}(k+1)k-\sum_{k=1}^{n}k\\&=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{(2)}-\sum_{k=1}^{n}k^{(1)}\\&=\frac{1}{3}(n+2)(n+1)n-\frac{1}{2}(n+1)n\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

これを一般化して自然数のべき和を導くことができる．すなわちＦの元でＲ係数多項式全体の集合を F_0 とすれば，F_0 はＲ上ベクトル空間をなす．

階乗関数１，$t^{(1)}$，$t^{(2)}$，……，$t^{(n)}$ はその基底の１つであるから

$$t^n=a_0+a_1t^{(1)}+a_2t^{(2)}+\cdots\cdots+a_nt^{(n)}$$

と表される．ここで係数 a_0，a_1，……，a_n を求めれば上記と同様に自然数のべき和を直接計算することによって求めることが可能である．

すなわち，$t^{(k)}$ の和分の１つを $U_k(t)$ とおけば

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}k^n=a_0\{U_0(m+1)-U_0(m)\}&\\+a_1\{U_1(m+1)-U_1(m)\}&\\+\cdots\cdots+a_n\{U_n(m+1)-U_n(m)\}&\end{aligned}$$

② Bernoulliの多項式の基本性質を利用すれば自然数のべき和を直接計算で求めることができる．

ここで Bernoulli の多項式 $B_n(x)$ とは

$$B_n(x)=b_0x^n+\binom{n}{1}b_1x^{n-1}+\binom{n}{2}b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_n$$

ここで，b_n を Bernoulli 数といい

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=0\quad（ただし，b_0=1）$$

を満たす．

高木貞次の解析概論では，ある領域における解析関数の Taylor 展開によって Bernoulli の多項式を導いているが，Bernoulli の多項式に差分演算子を施せば次の式が成り立つ．

$$(\delta B_n)(x)=n\cdot x^{n-1}$$

この式から Bernoulli の多項式の基本性質の１つが導かれる．

すなわち

$$\begin{aligned}(\delta B_{n+1})(x)&=B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)\\&=(n+1)x^n\ \cdots\cdots(3)\end{aligned}$$

よって，$x=1$，2，3，……，N を代入して加えれば

$$\sum_{k=1}^{N}k^n=\frac{1}{n+1}\{B_{n+1}(N+1)-B_{n+1}(1)\}$$

具体的に S_2 を求めてみる．

いま，$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$ に対して

$F(x)=B_1(x)+B_2(x)+\frac{1}{3}B_3(x)$ とおく．

Bernoulli の多項式の基本性質から

$$\begin{aligned}&F(x+1)-F(x)\\&=\{B_1(x+1)-B_1(x)\}+\{B_2(x+1)-B_2(x)\}\\&\qquad+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\{B_3(x+1)-B_3(x)\}\\&=1+2x+x^2\quad（(3)式を利用）\\&=f(x)\end{aligned}$$

よって $S_1=\sum_{k=1}^{n}k^2=f(0)+f(1)+\cdots\cdots+f(n-1)$

$$=F(n)-F(0)$$

ここで $F(n)=B_1(n)+B_2(n)+\frac{1}{3}B_3(n)$

$$\begin{aligned}&=\left(n-\frac{1}{2}\right)+\left(n^2-n+\frac{1}{6}\right)\\&\qquad+\frac{1}{3}\left(n^3-\frac{3}{2}n^2+3\cdot\frac{1}{6}n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(0)&=B_1(0)+B_2(0)+\frac{1}{3}B_3(0)\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

参考文献

数研出版　数学Ａ　　岩波書店　解析概論

第一学習社　数学Ａ　　岩波書店　基礎数学選書

（埼玉県立松山高等学校）