N 進法見え隠れ

まつだ　やすお
松田　康雄

筆者は，毎月1回，本学園の中学高校生を対象に，数学の校内公募問題を出している．幸い，毎回，熱心な生徒諸君のレポートが集まる．その中で，次の問題を出した．

問題． ある缶ジュース販売店が
「空き缶4本を缶ジュース1本と取り替えます」というサービスを始めた．
(1)　缶ジュースを25本買えば，何本飲めるか．
(2)　缶ジュースを50本飲みたいとき，最低何本買えばよいか．

交換した缶ジュースも，4本になれば，更にもう1本と交換できることに注意して，順に数えていけば答が出る．

解答． 藤本智子さん(中学2年生)のレポート

(1)　$25 \div 4 = 6$ …… 1
　空き缶と替えたジュースの本数は6本
$(6+1) \div 4 = 1$ …… 3
　空き缶と替えたジュースの本数は1本
$(1+3) \div 4 = 1$
　空き缶と替えたジュースの本数は1本
のジュースを飲むので，合計
$25+6+1+1=33$ (本)

(2)　(1)から，25本のジュースを買えば，最高33本分のジュースを飲むことができる．
$25:33=x:50$ より $x=37.8$……
38本買った場合，(1)と同様の計算をして，50本飲める．同様に，37本買った場合飲めるのは49本．したがって，最低38本買えばよい．　▨

沖田文子さん(高校2年生)は，最初の本数と合計の本数を対応させて

最初 $3n+m$ ($m=1$, 2, 3) 本買うと，全部で $4n+m$ 本飲める　……(＊)

ことを発見した．これは，筆者が予想していなかったことである．そして，きちんと証明したいと思った．

そこで，筆者は，4のべきに注目して，問題を4進法で考えてみることにした．

最初16本の缶ジュースは4本になり，更に1本になるので，16+4+1(本) 飲まれたあと1本の空き缶となる．最初の4本の缶ジュースは，4+1(本) 飲まれたあと1本の空き缶となる．最初1本の缶ジュースは，1本飲まれたあと1本の空き缶となる．

したがって，最初25本の缶ジュースは
$25=16+2\times4+1$
と考えることによって
$(16+4+1)+2\times(4+1)+1$ (本)
飲まれたあと
$1+2+1=4$ (本)
の空き缶となるので，もう1本缶ジュースが飲めることになる．全部で33本飲める．

10進法の25を，4進法で $121_{(4)}$ と表して，次のような4進法の足し算をして，小数点以下を切り捨てた数を10進法に直す計算をすればよい：

$$\begin{array}{r} 111.111\cdots \\ 22.222\cdots \\ +)\quad 1.111\cdots \\ \hline 201.111\cdots \end{array} \rightarrow 201_{(4)} \rightarrow 33_{(10)}$$

更に，考えを進めると，もっと簡単な方法が見えてきた．上記の計算の手順は次のようになる：

$25_{(10)} \rightarrow 121_{(4)} \rightarrow 121_{(4)}\times1.111\cdots_{(4)} \rightarrow 201.111\cdots_{(4)}$
$\rightarrow 201_{(4)} \rightarrow 33_{(10)}$

ここで，$1.111\cdots_{(4)}$ は10進法では

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots(**)$$

なので，(1)の問題であれば，[　]をガウス記号として $\left[\dfrac{4}{3}\times25\right]$ とすれば，すぐに答の33本が出る．

厳密に言えば，(＊＊)の左辺は有限個の和なので，右辺は $\frac{4}{3}$ より少し小さくなる．最初に買う缶ジュースの本数を A とすると，A が3の倍数でないときは全部で $\left[\frac{4}{3}A\right]$ (本) 飲めて，A が3の倍数のときは全部で $\frac{4}{3}A-1$ (本) 飲める．これは，(＊)に他ならない．

問題を一般化して，次の定理が成り立つ．

沖田の定理

空き缶 N 本を缶ジュース1本と取りかえる場合，缶ジュースを $(N-1)n+m$
$(N\geqq 2,\ 1\leqq m\leqq N-1)$ (本)買えば，全部で，
$Nn+m$ (本) 飲める．

結果的には，10進法だけで計算できるようになったが，途中に N 進法をはさんだので，一般化できたように思う．世の中の数理の中には，意外な所に N 進法が潜んでいることもあるようだ．

今後，リサイクルがもっと盛んになって，本稿のようなことが現実のものとなるかもしれない．

最後になりましたが，楽しい問題を紹介下さった田中不二夫先生にお礼申し上げます．

文　献

[1]大山梅次，ある懸賞問題について，数学セミナー，1969年1月号，p.32
[2]田中不二夫，すうがくなんでもかんでも考，学研数学サークル7号，1984，p.8
[3]チャレンジ算数 2-96，東京出版，p.14，p.25

(福岡県明治学園高等学校)