

高校数学と分岐理論

ひの まさゆき
日野 雅之

1 はじめに

高校数学において、方程式の解の個数を調べるという問題に頻繁に出会う。「数学Ⅰ」での2次方程式の解の判別、および「数学Ⅱ」や「数学Ⅲ」での微分法の方程式への応用はその典型例である^[1]。大学入試でも多く見られ、例えば

x についての3次方程式

$$2x^3 - 3(a+b)x^2 + 6abx - 2a^2b = 0$$

が3つの相異なる実数解をもつとする。このとき点 (a, b) の存在する範囲を求め、それを図示せよ。(92 東北大)

がある。

本稿の目的は、高校数学における方程式の解の個数の問題を、“分岐理論”の観点から眺め直すことにある。

ここで、分岐理論 (Bifurcation theory) について簡単にまとめる。詳細は文献 [2] およびその References を参照されたい。実数 m 次元空間における力学系を考える。ここに、ある方程式が時間あるいは時間と同等の変数とともに発展する解を表すとき、その方程式あるいは解を力学系 (dynamical system) と呼ぶ。簡単な微分方程式

$\frac{dX}{dt} = F(a, X)$ は右辺に時間の変数 t を陽に含まないため、“自励系”と呼ばれる。ここに、 $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ である。この系で速度が0になるような点、したがって関数 F の0点は平衡点 (Equilibrium point) と呼ばれる。分岐理論において、この平衡点がパラメータ a の値とともに変化する様子が研究の対象の1つである。

更に、離散力学系においても分岐理論が登場する^[2,3,4]。例えば $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対し、差分方程式 $x_{n+1} = G(a, x_n)$ ($n=0, 1, \dots$) を考えると、 $X = G(a, X)$ を満たす解 X は固定点 (Fixed

point) と呼ばれる。

よって $F(a, X) \equiv G(a, X) - X$ で F を定義すれば、固定点は $F(a, X)$ の0点である。

そこで、一般的に l 個のパラメータ a が変化するときの、関数 $F: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ の0点を調べる問題を取り上げる。

$F(a, X) = 0$ の解 (a_0, X_0) のうち、 a_0 の近傍で a が変化するとき、解 X の個数が X_0 の近傍において変化するような点 (a_0, X_0) を分岐点 (Bifurcation point) と呼ぶ。

簡単な例として、方程式 $x^3 + ax = 0$ を考える。解を (a, x) 平面に図示すると図1のようになる。

このように、パラメータの値の変化に対する解の変化の様子を表す図を分岐図 (Bifurcation diagram) と呼ぶ。図1において、 $a=0$ において解の個数が変化しているので、 $(a, x) = (0, 0)$ は分岐点である。

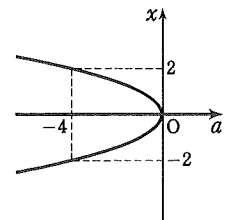


図1: 方程式 $x^3 + ax = 0$ に対する分岐図

次の第2節では、分岐の例をいくつか示し、第3節で不完全系という概念を紹介し分岐理論と高校数学との接点について理解を深める。第4節において、複数のパラメータを含む場合の例を取り上げる。

2 分岐の分類

1次元自励系 $\frac{dx}{dt} = F(a, x)$ を例にとり、 $F(a, x)$ の関数形を変えて、分岐の様子の典型的な例を3種類示す。

2.1 転回点

$$\text{方程式 } \frac{dx}{dt} = a - x^2 \quad (1)$$

の平衡点は $a-x^2=0$ の解を調べればよく、 $a>0$ のとき2つの平衡点 $x=\pm\sqrt{a}$ 、 $a<0$ のとき平衡点は存在しない。 $a=0$ の前後で平衡点の個数が変化しているの、 $(a, x)=(0, 0)$ は分岐点である。この例のように、平衡点が0個から2個に増えるような場合の分岐点を“**転回点 (Turning point)**”と呼ぶ。

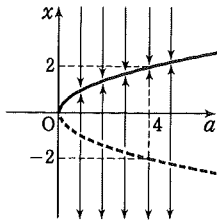


図2：転回点

図2に分岐図を与えた。

初期条件 $x(0)=x_0$ のもとで、式(1)を陽に解くと

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{a} \frac{x_0 + \sqrt{a} \tanh(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a} + x_0 \tanh(\sqrt{a}t)} & (a > 0) \\ \sqrt{-a} \frac{x_0 - \sqrt{-a} \tan(\sqrt{-a}t)}{\sqrt{-a} + x_0 \tan(\sqrt{-a}t)} & (a < 0) \end{cases} \quad (2)$$

$a > 0$ のとき、 $t > 0$ における極限を調べると、

$$x(t) \rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} & (x_0 > -\sqrt{a}, t \rightarrow \infty) \\ -\sqrt{a} & (x_0 = -\sqrt{a}, t \rightarrow \infty) \\ -\infty & (x_0 < -\sqrt{a}, \\ & t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \tanh^{-1}\left(-\frac{\sqrt{a}}{x_0}\right)) \end{cases} \quad (3)$$

となる。その様子は図2の矢印で示してある。つまり、時間とともに $x = -\sqrt{a}$ からは離れていき、 $x = \sqrt{a}$ には近づいていく。その意味で \sqrt{a} は安定な平衡点(実線)であり、 $-\sqrt{a}$ は不安定な平衡点(破線)である。

2.2 交差分岐

次に Logistic 方程式^[4]

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (b \neq 0) \quad (4)$$

を考える。 $ax - bx^2 = 0$ を解き、平衡点は $x=0$ または $x = \frac{a}{b}$ である。 $b > 0$ のときの分岐図を図3に示した。

2つの曲線、 $x=0$ および $x = \frac{a}{b}$ が原点において交差しているの、この型の分岐は‘**交差分岐 (Transcritical bifurcation)**’と呼ばれる。

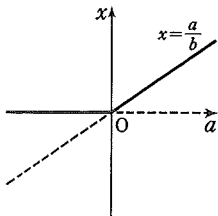


図3：交差分岐

ここでは省略するが、転回点の項におけると同様に微分方程式を陽に解くか、あるいは平衡点 $x=0$ または $x = \frac{a}{b}$ の近傍で式(4)を展開することにより微分方程式を線形化して解く方法などを用いれば解の安定性を判定できる。その結果、図2におけると同様に安定平衡点は実線で、不安定平衡点は破線で示した。

2.3 熊手型分岐

$$\text{最後に } \frac{dx}{dt} = ax - bx^3 \quad (b > 0) \quad (5)$$

を取り上げる。 $ax - bx^3 = 0$ を解き、平衡点は $x=0$ または $x = \pm\sqrt{a/b}$ であり、分岐図は図4に示されたように、枝分かれの様子を示す。ここでも、安定平衡点および不安定平衡点はそれぞれ実線および破線で示した。この分岐はその形状から、‘**熊手型分岐 (Pitchfork bifurcation)**’と呼ばれ

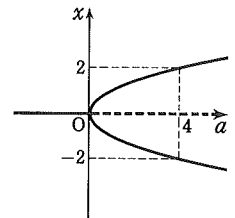


図4：熊手型分岐： $b=1$

ている。以上、分岐の典型的な3つの型について紹介した。更に複雑な分岐図も局所的に見るならば、ここで見たような基本的な分岐から構成されているはずである。

3 不完全性

本節では不完全性 (Imperfection) という概念を扱う。発展方程式 $\frac{dx}{dt} = F(a, x)$ を理想的な完全な系だと考え、更に不完全な系として

$$\frac{dx}{dt} = F(a, x, \delta) \quad (6)$$

を考える。ここに、 δ は微小な定数であり、周期的な解をもつ系に対して一種の不規則性 (Irregularity) を表すと考えてよい。

ここでは、不完全性によって分岐の様子が変化する例を示したい。

3.1 不完全な交差分岐

$$F(a, x, \delta) = x^2 - a^2 + \delta \quad (7)$$

とすると、完全系 $F(a, x, 0) = 0$ は (a, x) 平面における2直線 $x = \pm a$ を表す。

したがって、原点 $(0, 0)$ において交差分岐が起こ

っている(図5(b)). 不完全性 $\delta(\neq 0)$ が導入されると, 分岐図は, δ の符号に従って, 図5(a)および図5(c)のような左右あるいは上下の2つの部分に分離した曲線(双曲線)

$x = \pm\sqrt{a^2 - \delta}$ を表す.
 $\delta > 0$ の場合, $(a, x) = (\pm\delta, 0)$ において転回点をもっている(図5(a))ことがわかる.

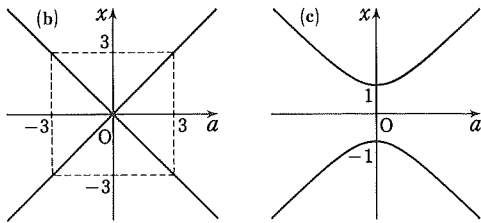


図5: 不完全な交差分岐: (a) $\delta > 0$, (b) $\delta = 0$, (c) $\delta < 0$

3.2 不完全な熊手型分岐

次に $F(a, x, \delta) = x(x^2 - a) + \delta$ (8)

に対して, $F(a, x, \delta) = 0$ の解を考える. $\delta = 0$ のとき, 前節で見たように $x > 0$ および $x < 0$ に関して対称な分岐図が得られ, 熊手型分岐が原点で起きている.

不完全性 $\delta \neq 0$ が導入されると, 対称性が崩れ, 分岐図は図6のようになる. この場合の分岐図を図示するには, 方程式 $x^3 - ax + \delta = 0$ を x に関して解くよりも, 曲線 $a = x^2 + \frac{\delta}{x}$ を追跡するのがよい.

図6(a)および(b)のように, 熊手型分岐は上下2つの部分に分離し, その一方が転回点 $(3(\delta/2)^{2/3}, (\delta/2)^{1/3})$ をもっていることがわかる.

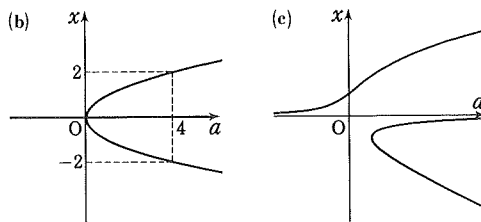


図6: 不完全な熊手型分岐:

(a) $\delta > 0$, (b) $\delta = 0$, (c) $\delta < 0$

4 複数のパラメータを含む分岐

前節まではパラメータを1つのみ含むような場合を考えたが, 本節ではパラメータが2個以上含まれる場合を考える.

第1節で大学入試での例題を紹介したが, ここで簡単な例を示す. 高校数学での典型的な問題に,

例題: 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の実数解の個数を調べよ.

というのがある. 判別式を用いれば答は,

$$b < \frac{1}{4}a^2 \text{ のとき } 2 \text{ 個,}$$

$$b = \frac{1}{4}a^2 \text{ のとき } 1 \text{ 個,}$$

$$b > \frac{1}{4}a^2 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

となる. よって, (a, b) 平面に図示すると放物線

$$b = \frac{1}{4}a^2 \tag{9}$$

を境界として実数解の個数が異なる.

分岐理論として興味を引く問題としてここで紹介したいのは

$$F(a, b, c, x) = -x^4 - ax^2 - bx - c = 0 \tag{10}$$

の形の方程式である. 関数 $F(a, b, c, x)$ は初等カタストロフィー理論において, Thom が1971年にまとめた7つの類型のうちの1つである^[5,6]. パラメータ a, b, c 3つを含むが, 簡単のため a を $a = -6$ に固定して, パラメータを b および c の2つに制限する.

方程式 $F(-6, b, c, x) = 0$ は (b, c, x) 空間におけるある曲面 S を表す:

$$S = \{(b, c, x) \mid F(-6, b, c, x) = 0\} \tag{11}$$

その概形を図7に示す. 図7は以下に示すような分岐集合を図示することなどを通して描いたものである.

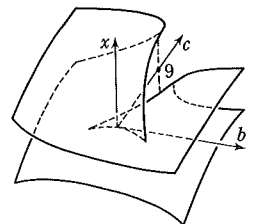


図7: 曲面 $S : F(-6, b, c, x) = 0$

(b, c) の値の組を1つ固定すると、4次方程式(10)は最大4個の実数解をもちうる。図形的には、 x 軸に平行な直線と曲面 S の交点の x 座標が実数解である。様々な (b, c) の値の組に対して実数解の個数を調べるために、分岐集合(Bifurcation set)の概念について簡単にまとめる¹⁶⁾。

まず、式(10)の表す曲面上の1点 (b_0, c_0, x_0) における接平面の方程式が

$$\frac{\partial F}{\partial b}(b-b_0) + \frac{\partial F}{\partial c}(c-c_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) = 0 \quad (12)$$

で与えられることに注目する。

ここに、 $\vec{n} = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial b}, \frac{\partial F}{\partial c}, \frac{\partial F}{\partial x} \right)$ は点 (b_0, c_0, x_0) における法線ベクトルである。

法線方向が x 軸に垂直であるような点 (b_0, c_0, x_0) を考えると、その点で x 軸に平行な直線を引けば曲面に接している(図7参照)。したがって、その接点で重解をもつ。

そのような点 (b_0, c_0, x_0) の集合はある曲線になり、その曲線の (b, c) 平面への射影

$$B = \left\{ (b, c, x) \mid F=0, \frac{\partial F}{\partial x}=0, x=0 \right\} \quad (13)$$

を分岐集合と呼ぶ。したがって、分岐集合を境界として実数解の個数が増えることになる。

分岐集合 B を図示するには、連立方程式 $F=0, \frac{\partial F}{\partial x}=0$ を満たす点 (b, c) の集合を考えればよく、これを整理すると

$$b = -4x^3 + 12x \quad (14)$$

$$c = 3x^4 - 6x^2 \quad (15)$$

と書ける。したがって、 b および c が媒介変数 x によって表示されていると考えて、それぞれの増減を調べ (b, c) 平面に図示すると図8のようになる。図8には実数解の個数の値も示してある。

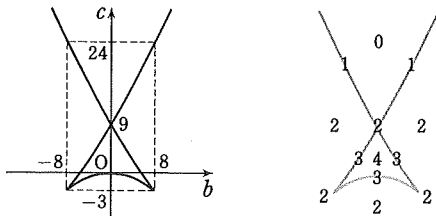


図8：分岐集合：“燕の尾”

図8の曲線の形が鳥の尾を連想させるため、この関数 $F(a, b, c, x)$ は燕の尾(Swallow's tail)と

呼ばれる。初等カタストロフィー理論では燕の尾カタストロフィーという名で呼ばれる。詳細は文献[5, 6]を参照されたい。

上述した2次方程式の例題で、

$$F(a, b, x) = x^2 + ax + b = 0 \quad \text{とすると、}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + a = 0 \quad \text{とを合わせ、} x \text{を消去することに}$$

より、分岐集合 $b = \frac{1}{4}a^2$ が得られる。これは判別式を用いて得られた式(9)と同じ結果である。

5 まとめ

分岐理論に関するいくつかの簡単な例を示した。“方程式の実数解の個数を、パラメータの値の範囲によって場合を分けて調べる”という問題は高校数学、大学入試数学において頻繁に出会うわけだが、この問題を分岐理論の観点から眺めなおした。

ここで紹介した他にも興味深い問題が多くあるが紙数の都合上割愛した。例えば、2次元の微分方程式系におけるホップ分岐の問題、不完全性の理論におけるIsola分岐、および初等カタストロフィー理論の類型の1つである‘尖点’カタストロフィーに関連した分岐集合の問題などである。

高校数学において取り入れられている題材を、比較的新しい数理科学的、応用数学的な観点からとらえ直すという仕事は、高校数学を指導する立場からは意義のある仕事の1つである。“方程式の実数解の個数”に関する問題以外にも題材は多くあるものと考えられ、それらの検討は今後の課題である。

参考文献

- [1] 高等学校学習指導要領解説 数学編, 平成元年12月, 文部省.
- [2] P. G. Drazin, *Nonlinear systems*, Cambridge University Press, New York, 1992.
- [3] D. Gulick, *ENCOUNTERS WITH CHAOS*, McGraw-Hill, New York, 1992.
- [4] 日野雅之, 数研通信 25号, 1996.
- [5] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin, 1975, 邦訳は“構造安定性と形態形成”, 岩波, 1980.
- [6] 野口 広, “カタストロフィー”, サイエンス社, 1977.

(東京都穎明館高等学校)