数学と高校物理の指導内容との関連

—— 単振動の指導について

中西（なかにし） 久夫（ひさお）

1　はじめに

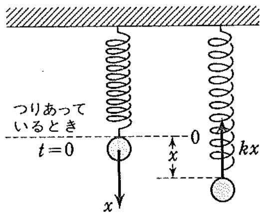
物理の指導内容に数学との関連性を考えるとき，物理の知識のみでは不十分で，数学的に解明していかないと骨の折れるものとして「単振動」の分野がある．物理の先生や理系の生徒に「単振動には運動の第2法則を表す運動方程式として微分方程式が出てくる．これを解くにはどうすればよいか」と聞かれることがよくある．その運動方程式は位置ベクトルの時間についての第2階の導関数までを含んだ微分方程式であり，それを解くことによってある物体の運動のありさまを知ることができる．

そういうわけで，実際理系の生徒にどのように指導すればよいか考えてみた．以下はその指導の例である．

2．具体的な指導例

単振動の例題として次のものを与える．

> **問題**　軽いつる巻きバネ（バネ定数 k）で質量 m の物体をつるして，これを下向きに引張って放した．この運動を論ぜよ．



最初に，この物体の運動方程式を考えてみる．右図のように物体に働いている力はバネの弾性 kx のみで加速度と反対向きであるから，この物体の運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$　$(k>0)$

として与えられる．

そこで，$\dfrac{k}{m}=\omega^2$　$(\omega>0)$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x \quad \cdots\cdots ①$$

となる．条件として

$$\begin{cases} t=0 \text{ のとき } x=0 \\ x=A \quad (A>0) \text{ のとき } \dfrac{dx}{dt}=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

を与える．つまり，①を②のように与えられた条件で解けば，この物体の動きなどを知ることができる．そこで，①の解を与えられた条件下で求める展開例を考えることにする．

(1)　指導例1

①の解を予想する方法である．①の解は三角関数であることは推測され，①は2階導関数を含むので，B，ε を任意の定数として，

$x=B\sin(\omega t+\varepsilon)$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=B\varepsilon\cos(\omega t+\varepsilon)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-B\varepsilon^2\sin(\omega t+\varepsilon)=-\omega^2x$$

$(\because\ x=B\sin\ (\omega t+\varepsilon))$

となるから，①の解は $x=B\sin(\omega t+\varepsilon)$ であることが分かる．②より，

$B=A$，$\varepsilon=0$

したがって $x=A\sin\omega t=A\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$

$\left(\because\ \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$

(2)　指導例2

便宜上，次のように簡略化して

$$\frac{dx}{dt}=x'(t)=x'$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x''(t)=x''$$

とおくと，①は $x''=-\omega^2x$

となり，両辺に x' を掛けて t で積分すると

$\dfrac{1}{2}(x')^2=-\dfrac{1}{2}\omega^2x^2+C'$（$C'$ は任意定数）

つまり，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=C \quad (mC'=C\ とおく) \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．この左辺はともに0または正であり，第1項はxの位置のときの物体の運動エネルギー，第2項はOを基準点としたときのxの位置の物体の弾性エネルギーを表す．

$x=A$ のとき $\frac{dx}{dt}=0$ であるから，③より

$C=\frac{1}{2}kA^2$ となり，③は

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{k}{m}(A^2-x^2)=\omega^2(A^2-x^2)$$

となる．そこで，$t=0$ の瞬間では物体は下向きに動いているので，$t=0$ の近くでは $\frac{dx}{dt}>0$ とみなせる．つまり，

$$\frac{dx}{dt}=\omega\sqrt{A^2-x^2},\quad \frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\omega\, dt$$

$t=0$ のとき $x=0$ より，$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\omega\int_0^t dt$

そこで，$x=A\sin\theta$ とおいて変数変換すると

$$\theta=\omega t$$

すなわち，$x=A\sin\omega t=A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

指導例(1)，(2)で問題の運動方程式の解は求められたが，この運動は式の結果より周期運動を示し，tの変化に対してxは $|x|\leqq A$ の範囲を上下に規則的な往復運動をすることが分かる．これが物理で習う単振動といわれるものである．

したがって，この物体の運動は三角関数の周期は2πであるから，Oを中心として周期をTとすると

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

の単振動を行う．

3．おわりに

指導例2の

$$\frac{dx}{dt}=\omega\sqrt{A^2-x^2}\ より\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}$$

として，tをxの関数とみて，$t=f(x)$ とおいてxで両辺を積分し，$t=0$ のとき $x=0$ で積分定数を定めて$f(x)$の関数式を求める展開をしていく方が生徒はよく理解できるのではないかと思う．

ところで，新課程の「数学III」では旧課程の「微分・積分」の分野の指導内容「微分方程式」の項目自体が削除されたけれども，

$\frac{dx}{dt}$，$\frac{d^2x}{dt^2}$ の記号の定義・意味や用い方，

$\frac{dx}{dt}=g(x)$ の積分の方法などに慣れさせれば「微分方程式」という項目を与えて指導しなくても生徒は理解できるのではないかと思う．

最後に，微分方程式の解法は他にもいろいろ考えられようが，例えば，$x=e^{\alpha t}$ とおいて

①の方程式に代入して $\alpha=\pm\omega i$ を得ることにより2つの基本解$(e^{i\omega t},\ e^{-i\omega t})$が出る．

そして，①の解はこの2つの基本解の1次結合で表されるから

$x=A_1e^{i\omega t}+A_2e^{-i\omega t}$ （A_1，A_2は任意定数）

$t=0$ のとき $x=0$ より $A_2=-A_1$

つまり，上式は

$x=A_1(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$

ここで，オイラーの関係式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いると $x=2A_1i\sin\omega t$ となり，$x=A$ のとき $\frac{dx}{dt}=0$ より $x=A\sin\omega t$

と導き出されるが，高校教材との関連で生徒に理解できるように数学的に指導できるのは上記の2つの例であろうと考えられる．

（兵庫県立神戸北高等学校）