第7回　数学コンクール 1996

四方（しかた）　義啓（よしひろ）

最初のうちは，毎回「もう，これで終わり」と思っていた「日本数学コンクール」ですが，今年で何と第7回を迎えました．いろいろと批判の種にされてきた「答のないコンクール」もここまできたかと感無量です．コンクールに参加し，応援し，育てて下さった方々に心からお礼申し上げます．

本当はそれに応えて，今回は大きく飛躍するつもりだったのですが，十分な飛躍ができたかどうか，ちょっと心配になっています．ただ，この一方で，「考えることはおもしろい」，「数学はホントは，ものを考えるときの強力な武器なんだ」というボロ博士，ひいては，コンクールの主張に同調してくれる「本当のお友達」も増え始め，また「コンクール卒業生」からもコボロ，マゴボロ博士たちがスクスクと育ってきてくれているのは，うれしい限りです．今回の資料や実験装置も，これらコボロ，マゴボロなど「ボロ博士のお友達」が徹夜で作ってくれたものなのです．

更に，解答を見せていただいて，今回も力いっぱい考え，「こんなことも数学なんだ」，「よしやってやろう」と新鮮な驚きやモーレツな「やる気」を抱いていただいた方が多かったことを非常にうれしく，力強く感じています．こういう「力」が，「未来を拓いていくに違いない」，「日本の未来は明るい」と思っています．ただ，欲張り過ぎかもしれませんが，この上に，「この実験装置を作った誰か，そのために徹夜した誰か」，更には，「今日の会場を準備し，片付ける誰か」にも思いを馳せていただいたとしたら，こんなに心強いことはないなと思っています．コンクールで「いい解答」を作り，「いい結果・成績」を出すことも重要には違いないのですが，よりよい未来を拓くためには，そういう「心」が欲しいのです．

例えば，柔道や剣道は，(今日では)単なるスポーツに見えるかも知れません，が，そこに「道」と言う字がくっついているように，ある時代には，それを通して「心」を養うための「学問」でもあったのです．ボロ博士も，そしてその仲間たちも，コンクールの数学をそんなものの1つだと思っています．受験の数学とコンクールの数学が決定的に違うのは，本当はこの点なのです．とにかく，コンクールは「1枚の答案」だけで，1日だけで，終わっていいものではありません．それを確認していただくために，春と夏には「希望者を集めて」フォローアップセミナーを開きますし，「これはおもしろいな・もっとやってみたいな」と思った高校生なら「申し込めば」科目等履修生になって名古屋大学に潜り込むことも可能なようになっています(ただし，人数，その他制限あり)．オリンピックでは，参加することに意義があるようですが，コンクールは「明日を拓いてこそ」意味があるのです．

日本人，そして日本文化は，このような「心」を綿々と受け継いできたのではなかったのでしょうか．実は，現在の日本の「物作り」における世界的な大活躍や，減らしても減らない貿易黒字は，「頭・知識」ばかりではなしに，この「心・知恵」の上に初めて成り立っているような気がします．今回，日本文化をテーマにしたのは，それに少しでも触れてもらおうと思ったからなのです．日本文化は決して，「富士山・浮世絵」，「能・歌舞伎」だけに終わるものではないと思っています．

と言えば，大抵は「日本文化と数学のどこに関係があるの？」と変な顔をされるので，少し説明を加えましょう．明治時代，日本は大急ぎで，西洋の学問を輸入しました．輸入した学問を，文句を言わずに覚えること，横文字を縦文字に直すこと，それが当時の勉強の全てでした．でも，その裏側では，日本文化は持ち伝えた「研ぎ澄まされた感覚」を，密かに培っていたのです．実は，これによって日本人は「頭だけでなしに手を使って考える」という見事

な生き方を身につけることができました．現在，日本が，カメラや自動車に見るような「創造」的工業製品を世界に送り出しているのは，輸入した学問の成果もありますが，むしろ，こうして，昔から持ち伝えた「知恵」のせいであると言ってもいいと思っています．

機関車がイギリスで初めて生産され，写真機がドイツで作られたころは，その制御は，ピストンや蒸気弁，そして，歯車やゼンマイなどに頼っていました．日本は，必死になって，それを輸入し，真似ようとしたのです．ですが，当時の我が国の工業水準ではそうやすやすと，それに近づくことはできませんでした．戦前，舶来と言えば，すべていいものばかりだという感覚が抜き難かったのはこのせいでもあるのでしょう．

一方，これらの制御はすべて機械式ですから，細かい精密な制御は苦手でした．しかし，現代文明はそれだけではどうしようもない程精密な制御を要求するようになったのです．例えば，自動車エンジンにしても，機械式の制御だけに頼っていたのでは，排気ガス法案(マスキー法)をクリアすることはほぼ不可能で，自動車をアメリカで売ることはできなくなっていたかもしれない程なのです．

このピンチをチャンスと捉えて，その気の遠くなるほど精密な制御を可能にしたものこそ，「研ぎ澄まされた感覚」を駆使して「頭ばかりでなしに手を使って考える日本人」だったのです．日本人は「研ぎ澄まされた感覚」を「半導体センサー」に，そしてピストンや蒸気弁の働きを「マイクロコンピュータ」＝「頭」と「電磁スイッチやマイクロモーター」＝「手」に置き換えることを思いついたのです．このマイクロコンピュータに詰め込んだものこそ「新型の数学」です．日本人は，こうして「新しい数学」を機械に詰め込むことによって，いくつもの問題を見事に解決し，未来を切り開いて来たのです．これは，多分，世界史に残る大きな発明・創造に違いありません．このような「数学製品」によって日本は大幅な貿易黒字を稼ぎ，世界に雄飛しているのです．

そう言われれば，身の回りにこんな製品がいっぱいあることに，気がつかれるでしょう．カメラにせよ，自動車にせよ，そして，最近では炊飯器までが，日本製なら，たいてい，2，3個のマイクロコンピュータを積んでいるのです．その中には，こんな「新しい数学」がぎっしり詰まっているのです．

前置きが少し長くなり過ぎましたが，「未来を拓くためには，目の前の問題にぶつかって，(出題者ですらもっていないかもしれない)答を創造すること，少なくともそれに近づくことが重要だ」，「そのために考え・悩み，知恵を絞ることと，これまでにある知識をまとめて優等生の答を書くこととは，全く別だ」という2点が，コンクールの基本姿勢なのです．ただ，本音を言うと，今年度，この通りに問題が作れたかどうか心配なのですが，とにかく順に見ていくことにします．

問題 1

ここに正方形の紙があります．これを，ぴったり重なる(合同な)，へこみのない(凸な) 3つの部分に切り離したいのです．「へこみがない」ということはL字型や三日月形は許されないということです．さて，このようなやり方は一体いくつあるでしょう．その全部を数え上げてくれませんか，それで全部だということを言うのは結構めんどうですよ．更に，2つの部分，4つの部分に切り離す場合も考えてみてください．

解説 1 すべての問題が答を創る問題というわけにもいかないので，この問題だけは，答のある問題にしました．「正方形の折り紙を3つ，または4つの合同な凸型の部分に切り分けよ」というだけの問題なら，どこかのパズルにでもありそうですが，「それがすべてか」と聞いている部分は，結構，難しいのです．なお，うるさいほど凸型と言っているのは，セッケンの泡の集まりなどがそうなのですが，どちらの部分に対しても凸だったら，その境界は直線だと言って欲しかったからです．こうして，境界が直線だということが分かると，それの分割の状況はその端っこだけで把握できます．実は，数学のすばらしい所の1つは，このように「ややこしい，すべての状況」が「何らかの特徴づけによって」完全に把握できるという点にあると思っています．数学にできて，他の科学にはできない，いわゆる，数学の御家芸は，「角の3等分」

など幾何学の作図題に見られるような「不可能性の証明」です．そして，その「タネ」はこういう「特徴づけ」と「分類」とにあるのです．これからも，数学のこのような部分を大事にしていこうと思っています．

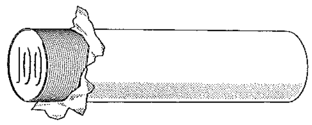
さて，簡単のために，切り分け線が折り紙の角(カド)を通らないと仮定します．すると，切り分け方の分類は折り紙の角(カド)，ないし，折り紙の１辺に目をつければいいということが分かります．折り紙には角(カド)が４つありますから，それを３つの凸型に切り分けるのなら，どれかの部分に直角の角(カド)が２つ(そして，それが挟む１辺も)入っていることになります．すると，どの部分も直角２つと折り紙の１辺とを含むことになって，折り紙を短冊型に３等分する以外にないことが分かります．４つに分ける場合も同様に考えればいいのですが，

$4=4\times 1$ …… ①　または　$4=2\times 2$ …… ②

という因数分解が効いてくるのはおもしろいところです．折り紙の中心で直交する十字線を描けば，折り紙は４等分されますが，これは式①にあたります．また，折り紙をちょうど半分に折り重ねて長方形を作り，その真ん中を通る直線で２つに切る場合は，式②が実現されます．

問題２

昔の商家や銀行では，100個とか50個とかのコインをひとまとめにして紙で巻いて筒状にしていました(資料１)．ばらばらのコインを揃えるのには，「それをふろしきに入れて振り回すといい」と言われていましたが，本当でしょうか．コインの代わりに「チップ」を用意しておきましたので，ひとつ実験してみてください．もしうまくいったら，それがなぜかを考えてみて欲しいのですが，その考え方はほかの形，例えば「立方体」や「球」にも応用できるでしょうか．


資料１

解説２　一昔前なら，ふろしきに多少いいかげんに物を包んでおいても，持って歩いているうちに，なんとなく「収まってくる」ことに気づいていた人は多かったと思います．

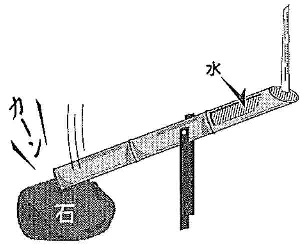
これは，ふろしきがその張力によって中に入っているものの体積を最小にしようとしているからだと考えることができます．ですから，この問題も，球体や立方体を詰めた場合は，その体積をふろしきが最小にしようとした，または，張力(の絶対値の積分)を最小にしようとしたと考えると大体うまく行きます．パッキングの問題というのがそれです．こういう問題は，数学の分野では微分より１つ上の「変分の問題」と呼ばれています．ただ，呼ばれているだけで，めったに解けないのは困りものですが…….

コインの場合は，球体や立方体の場合と少し事情が違っています．と言うのも，コインには表裏の方向と，それに直角な方向という２つの違う方向があって，「裏表の方向」になら，「２つのコインがパチンと合わさって，離れない」が，直角な方向には，滑りあって自由に動くという特徴があるのです．このように，方向性をもった成分・分子がくっつき合うというのは，結晶が成長する時や，最近，注目されてきているナノクラスターが生成する時などに起こっています．ですから，この問題はその方面の専門家からも興味をもたれています．本式に言えば，これは「切り替わり評価関数をもつ変分法」と言うチョー難しい未来型数学に属するのですが，中高生に，まともに，そんなことをやれと言っていたわけではありません．

ここで求めていたのは，ふろしきとコインで手を使って遊びながら，「不思議だなあ，おもしろいなあ」と，昔の知恵を再確認してもらうこと，そして，できれば「研ぎ澄まされた感覚」を使って，コインが揃うときには「表裏の方向にパチンと合わさるプロセス」と，「それに直角な方向に滑ってうまく揃うプロセス」との２つが共に働いていることに気づいてもらうことでした．そして，あわよくば，体積最小でも張力最小でも何でもいいから，何とかそれを数学に乗せる工夫をしてくれればなあと思っていたのです．最近の科学は，数学にこのようなことを求めてきているのです．

問題 3

京都のお寺にある「ししおどし」(正式には添水または僧都と書いて「そうず」と言う)を知っていますか．これは資料2に示すような簡単な装置で，一定量の「水」が「竹筒」の片方に貯えられると，もう一方の側がはねあがり，それが急に落ちて来て「カーン」という音を立てて「しし」を「おどす」というものです．これを見学して来たコボロ・マゴボロ博士たちは，「竹と水」に代えて，「おたま」と「砂」とで「ボロししおどし」を作ってみました．「おたま」に軸受けをつけて天秤のように作り，そこに「砂」を落とせば簡単だと思ったのですが，うまく跳ね返りません．「砂」を「水」に代えると何とか跳ね返りそうになりますが，まだまだです．ひとつ，「ししおどし」の秘密を見破って，コボロ・マゴボロ博士たちに「なぜうまくいかなかったのか，どうすればうまくいくか」を教えてやってくれませんか．またボロ博士は，「その秘密はいろいろなところで応用されている」と言っていますが本当でしょうか．



資料2

解説 3 この問題を作っていたために，ほかの問題の手を抜いたんだろうと悪口を言われたほど，ボロ博士はこの問題を気に入っています．これこそ，日本文化の問題のつもりなのです．ボロ博士の「この方法を利用して水力で米を搗いたのは日本だけであーる」という主張は事実らしいのですが，近代では，これに似た技術は実に広く使われています．

実際にも，電気のスイッチのオン・オフのように，「どちらにいこうかな」と，あまり長くふらふら考え込んだりされると困る場合が多いからです．目に見えないほど小さいスイッチが数万，ときには数億も集まっているコンピュータなどでは特にそれが重要になります．

そこで，「泣き面に蜂，弱り目にたたり目」とも言われるように，どちらかに傾きかけたバランスを，その方向によけいに倒すことによって，一気にバランスを崩して，状態を急速に変化させるという技術が使われます．技術の用語ではこれを特に正帰還と呼んだりします．ボロ博士は「おたま」と「砂」とで「ししおどし」を作ると失敗するのは，この正帰還がうまくかからなくなったせいだと，見抜いて欲しかったわけです．

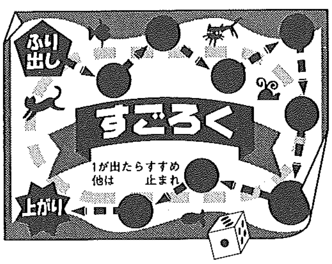
中高生には難しかったとは思いますが，「本物ししおどし」は，水の粘性と，竹筒の支えにもたせた「遊び」とで見事に正帰還をかけているのです．粘性というのは，水の分子なんかがもっている「何事もお隣に合わしておこう」という性質のことで，「本物ししおどし」では，竹筒が傾いて，水がすこしでもこぼれ始めると，周りの水もいっせいに流れて行き，うまくすると一気にカラになるわけです．これを助けているのが，支えの「遊び」です．竹筒が右に傾くと，支えは少し左によって，竹筒のバランスをよけいに傾けます．こうして正帰還がかかり，水は一気に流れ落ちます．

数学的には正帰還の一言(？)で済ませていますが，正帰還をかける方法はいくつもあります．「おたま・ししおどし」の場合は，実際におたまを支える点から「おたま」の重心までの距離を大きくとってもいいし，移動する重りをつけてもいいのです．

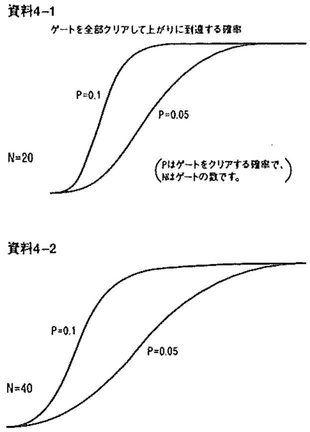
また，ある答にあったように，振動させるというのも(多少無理はあるにせよ)1つの考え方だと思います．

問題 4

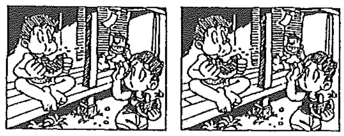
(一番簡単な)すごろく遊びというのは「上がり」までに，いくつかの「ゲート」があり，その「ゲート」を「サイコロ」を振って全部クリアして「上がり」に到達するという遊びです(資料3)．早く上がる人と，なかなか上がれない人ができますが，すごく大勢でやったとすると，ある時間までに上がる人の割合と，「上がり」までの「ゲート」の数，および「ゲート」をクリアする確率との関係は資料4に示したようになると考えられています．さて，資料・表にコボロ・マゴボロ博士たちに「2つの絵の間にある8つのまちがいを全部探しだせ」というゲーム(資料5)をやってもらい，何分で何人が上がったかという成績を示します(資料6)．ボロ博士は，「すごろくゲーム」を応用すれば，このまちがい探しゲームをやっているコボロ・マゴボロ博士たちの頭の中が「数学的」に見えるかもしれないと言っていますが，君は賛成しますか．



資料3

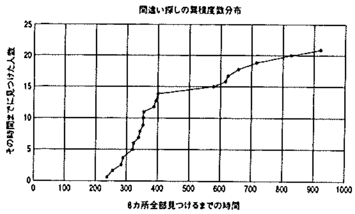


資料4



平成8年8月4日中日新聞サンデー版「どこが違う」より

資料5



資料6

解説 4 この問題位置は，いつもなら「高校数学ハイライト」誘導編なのですが，O-157 の流行などに惑わされて，今年は，誘導編と結論編とが一緒になってしまいました．

高校では二項分布を習っているはずなので，少なくとも「すごろく遊び」の「上がり」までの時間の分布は，高校数学の範囲で計算できるだろうと思っています(もちろん，各回にサイコロを振る時間や，各回に成功する確率は一定だと仮定する)．この計算を実行してみると，「上がる」確率が初めてプラスになるまでの時間や，「上がる」確率がピーク(極大)になるまでの時間と，すごろくのゲートの数，そして各回に成功する確率の間にある関係が成立することに気づくと思います．

O−157 と言ったのは，実は，ある種の感染症については，すごろくを振り出してから「上がる」までの時間を，感染から発症までの「潜伏期間」と読んで，「上がる」確率がピークになる時間を「感染の最盛期」と読むと，不思議なくらいぴったり合うことが分かってきているからです．また，植物の種を蒔いたり，接合させてみたりすると，「上がり」までの時間が，「芽を出すまで」の時間だったり，「接合を始めるまで」の時間だったりします．どうやら，生物は「すごろく」遊びをしながら，発生したり，成長したりしているようです．

数学が，有効なのは，このような場合には，潜伏期間や最盛期などの「実際に測れる」，「与えられた」情報から，逆に，二項分布を利用して，すごろくの確率やゲーム数など，見えないものを推定することができると考えられる点です．この辺こそ「高校数学ハイライト」ではないでしょうか．

問題にした「まちがい探し」実験のような場合にも，もし，「すごろく」分布の仮定や，それによる近似が成立するものだとすれば，データに「与えられた」情報から，脳の中での，確率やゲート数が推定できるかもしれないわけで，ボロ博士が言っていることにも一理があると思います．このデータからは，「まちがいの探し方」に，どうも，2つのタイプがありそうに見えてきます．実際に，被験者になった人に聞いてみてもその通りの答が得られました．

問題 5

ある人がラジオで，「ににんがし（2・2が4）」「にさんがろく（2・3が6）」「ニシンが8匹取れました（2・4が8）」…と唱える九九は，日本語でないとできないと言っていました．日本語では，4を「ヨン」と読んだり「シ」と読んだりして，口調を整えることができるからというのがその理由です．これは本当でしょうか．例えば英語では「九九」にあたるものはないのでしょうか．もしないとすれば，作れないでしょうか．

解説 5 本当を言えば，この問題では楽しく遊んでいただければいいなと思っていたのです．ですが，多くの人が真剣に考えてくれていましたし，すばらしい答案もありました．

この問題は，普通には，音韻・リズムや「音と意味」の間の「多・対・多」の対応問題と捉えられると思います．その範囲では，ボロ博士の主張は正しいでしょう．ですが，その他にもいくつものアプローチがあることにも気づいていただけばよかったかなと思っています．例えば，英語の数字を，実際に書いてみればすぐに気づくのですが，英語には10進法の他に，12進法（twelve で切り替わり），20進法（twenty で切り替わり）などの記数法が混じりこんでいて数を唱えるのが結構ややこしいのです．このために，英語では数を唱えること自体が，ややこしくて，中国から10進法をもらってきた，日本語の場合とかなり様子が違うのです．このように，数の唱え方，そして計算の方法などを含めて，数学自体も，その国の文化にしっかりと包み込まれているのではないのでしょうか．

なお，もし，ボロ博士の強引さを許していただけるなら，ここでも，高校数学ハイライトを見ることができます．そのために，次のようにして，単語の「長さ」と「聞き取りやすさ」また「発音しやすさ」，そして，会話のしやすさの関係を数量化してみます．

まず，単語の「長さ」が大きい方が（例えばそれに反比例して）「発音しやすさ」は減少する．一方，1音節語（例えば「目」）より2音節語（例えば「耳」）の方が，聞き間違いをしにくくなる．だから，「聞き取りやすさ」は（一概には言えないにせよ）単語が「長い」方が，（例えば「長さ」に比例して）よくなるとしてよい．会話においては，話す・聞くの両方が行われるから，最適化はその平均値が極値となるときにえられる．

そうすると，ある「語長」，日本語なら4音節くらい，に対して最適値があり，「九九」をはじめとして，多くの略語がこの長さをもっている，逆に言うと，この長さで作れるから「九九」が定着したのだとも考えられるということになるのですが……．

（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）