数学発想物づくりコンテストの報告

後編

秋山（あきやま） 仁（じん）

中高生の半数以上が数学嫌いになってしまった現状を打破するために，数学関係者の中でいろいろな試みが活発に行われている．

数学をデキルようにさせることと，数学を好きにさせることの間には多少のギャップがあるが，私の所属する研究所ではまず，数学を好きになってもらうことが先決と考え，その方法を研究開発している．

（中略）数学に関心のある生徒も，無い生徒も，またデキル生徒もデキナイ生徒も一緒に考えることの楽しさ，工夫の素晴らしさ，物をつくることの喜びを実感できる“**数学発想物づくりコンテスト**”を行ってみた．（中略）生徒の理数系離れのなかで苦闘している全国の数学の先生方の一助になれば幸いと考え，その様子を本稿では紹介したい．

（前編の序文から抜粋）

6題の課題と幾つかの優れた作品例

（編集部注） 課題の1，2番は前編にて紹介済みです．今回は3～6番について掲載しました．また，問題番号及び図番号は前編からの通し番号になっています．

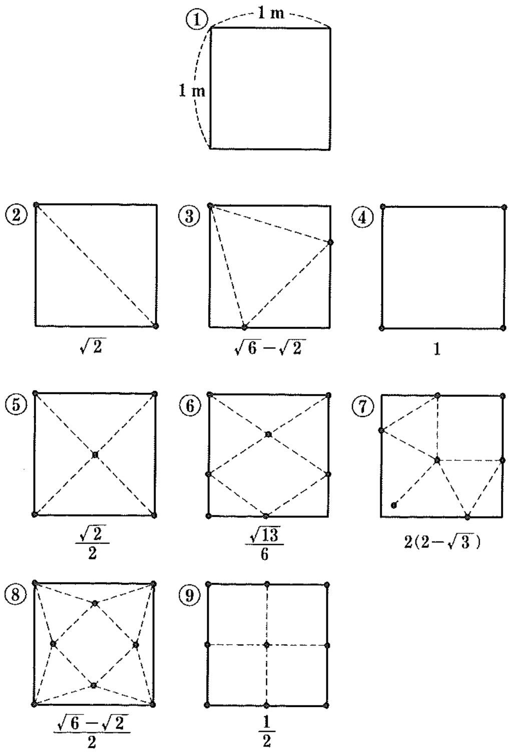
［3］ 植樹問題

（問題）

1辺の長さ1の正方形の土地（図Gの①）にn本の苗木を植えることになった（正方形の周上に植えてもよいものとする）．苗木を植えるために考慮しなければならない条件として，苗木と苗木が養分を取り合わないようにするために，それぞれの間隔をなるべく大きくしたい（すなわち，n本の苗を植えるとき，2本の苗木の組合せは全部で${}_nC_2$通りあるが，これらの距離の最小値＝最短間隔が最大になるようにしたい）．この条件を満たす苗木の配置を“最適”と呼ぶことにする．

苗木が2本ないし9本の場合については，図Gに示した配置が最適であることが分かっている．図の下に記した数値が最短間隔で，これより大きくはできない．

さて，10本，11本，12本の苗木を植えるときの各々について，どのようにこれらの苗木を植えるのが最適か？ また，その最短間隔を求めよ．



図G

（解説）

$n \geqq 10$ の場合のいくつかについては，「おそらく最適だろう」という解の候補は海外の研究者によって示されているが，最終決着はまだ着いておらず未解決のままである．

ただ，助手の山口康之氏からこの問題の解（の候補）を見つけるためには，次の実験が有効ではないかという名（迷？）案が提示された．

正方形型のプラスチックのお盆の上に水を張り，そこに発泡スチロールの上に乗った磁石を勝手な位置に置く（図H）．

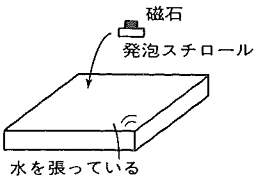


図 H

すると，磁石と磁石が反発しあい，どの磁石も他の磁石が近寄ってくると，離れよう離れようと動きまわる．そして磁石が最終的に落ち着いた位置が求める最適配置ではないかというものである．例えば，9個の磁石を置くと，図Gの⑨の配置になり，これは数学的に決定されている最適配置に一致する．だから，磁石をもう1つ置いて10個にすると，$n=10$ の場合の最適配置の候補がある程度推測できるのではないかというものだ．その方法などをベースにして生徒が求めた10個，11個，12個の場合の配置は図Ⅰに示すものだが，これは今までに知られていたものを超える結果ではなかった．

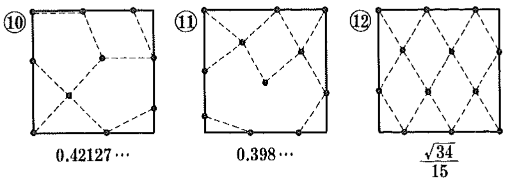


図 I

［4］ 1996から正方形への裁ち合わせ

（問題）

1996（図J）をなるべく少ない個数の図形（ピース）に切り分け，これを置き換えて正方形にせよ．ただし，ピースの個数をできるだけ少なくなるようにせよ．

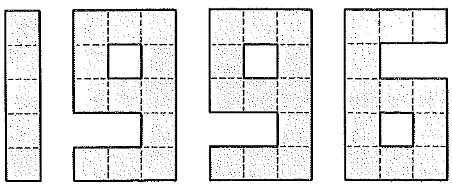


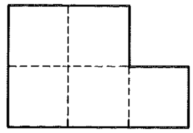
図 J

（解説）

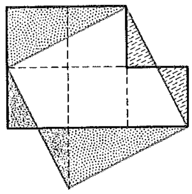
裁ち合わせの問題は作図と整数の理論が絡んでおり，また，試行錯誤を繰り返すことにより，名案が浮かぶこともあるので面白い．また，一見，似たような問題でも条件が微妙に異なるだけで難しかったり，易しかったりすることがある．易しい例と意外と難しい例のそれぞれをまず以下に示そう．

次の図形を正方形に裁ち合わせせよ．

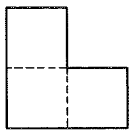
（易しい例）



（答）



（意外と難しい例）



格子点を結ぶだけでは，長さ $\sqrt{3}$ が作図できないので，この先が大変になる．答は省略．

次に，この問題を解くために用いる数論的背景を述べよう．1996を構成する単位正方形は全部で41個である．この面積41は，$41=4^2+5^2$ のように2つの平方数の和として表せるので，求める正方形の1辺 $\sqrt{41}$ の長さは格子点を結ぶ線分の長さとして表現可能なことが，この問題を比較的容易にしている．ピースの個数が多くてもよいなら答は簡単に求められるが，ピースの個数を最小にするにはどのように切ればよいかを決定するのは難しい．出題者が予め準備した解答は図Kに示すものであり，そのピースの個数は14であった．

3つの班が寄木細工風に色とりどりのピース数14の正解を示したが，より少ないピース数の正解は生徒からは提示されなかった．おそらく，14が最小であろうと出題者は予測している．

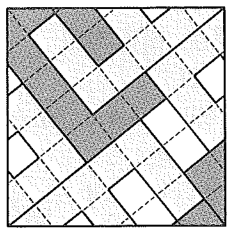
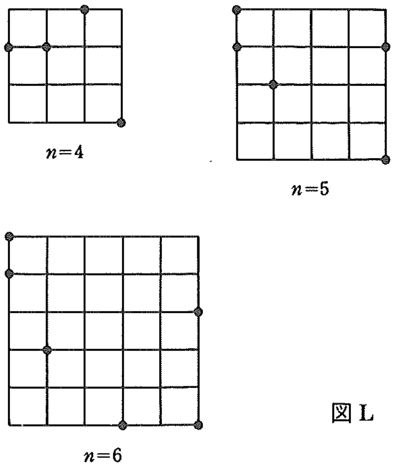


図 K

［5］ 正方格子盤上の不等距離配置

(問題)

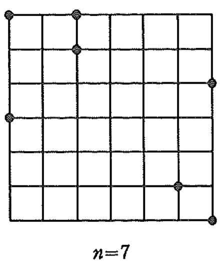
$n\times n$ の正方格子盤がある．この格子点に n 個の碁石を置き，どの2個の碁石の間も異なる距離にしたい．どのように置けばよいか．図Lを参考にして，n をなるべく大きくしてもらいたい．



図L

(解説)

この問題は一見とっつき易そうなので，生徒のみならず先生方までがグラフ用紙を片手に研修センターのあちこちで熱中していた．中には本物の碁盤まで持ち出す人もいた．しかし，この問題は意外と強者だった．“できた”と誰かが叫ぶと“ドレドレ”と周りの人が集まって行き，どこかに等距離の2点を捜し出す．そして，叫び声の主はガックリといった状況が続いた．問題文には，$n=6$ までの例が示してあるが，$n=7$ のときは本質的には(回転や折り返しを除いては)図Mに示す唯一通りしかない(この事実は証明済み)せいか，どの生徒も $n\geqq 7$ のときの正解を見つけ出せず出題者の期待を裏切った．生徒達が苦戦した原因を探ると，次の2点が思い当たる．



図M

(1) 途中まで条件を満たすように点を配置できていて，更にもう1点を付加すると条件を満たさなくなることに気づいたとしよう．このとき，部分的修正では済まず，もう1度初めからやり直さなければならないこと．

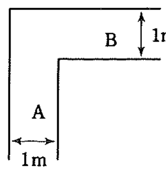
(2) n 個の石を置いて，どの2個の間の距離も異なるためには，少なくとも ${}_nC_2$ 種類の距離が必要である．一方，$n\times n$ の格子盤の格子点を結んで得られる距離は高々，${}_{n+1}C_2-1={}_nC_2+(n-1)$ である．しかし，この数え方にはダブリがあるのでこれら2数の差 $(n-1)$ は実際にはもっと少なくなる．このことから分かるように，ただ闇雲に点を置くのではなく，数学的に計画して配置していかなければならない．しかし，ほとんどの生徒はそうしていなかった．この問題はシステマティックにものを考えることの重要性を生徒に認識させるための良い例である．

この問題に関連して，$n\geqq 16$ のときは条件を満たす置き方が存在しないことを池野信一，中村義作両先生がエレガントな証明で決着済み(数芸パズル第69号，1972年11月，$p.82$，$p.83$)であるので関心のある方は参照されたい．

［6］ ゴーカート問題

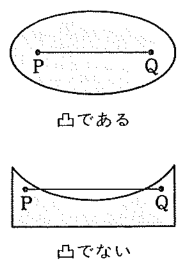
(問題)

直角に曲がった幅1mの通路がある(図N)．地点Aから地点Bに平面図形(ゴーカート)を移動させたい．図形が凸の場合と凸でない場合の各々について，通過可能な平面図形の最大面積とその図形の具体的な形を求めよ．ここでは，すべて平面上で考えることとする．すなわち，図形を傾けたりしてはいけない．



図N

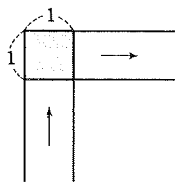
また，図形 S が凸であるとは，『図形 S の内部の任意の2点P，Qに対して，線分 PQのどの部分も図形 S の中に入っている(ただし，図形 S の境界上でもよい)』ことである(図O)．



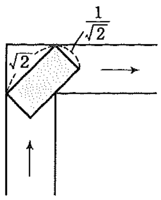
図O

(解説)

この通路を通過できる正方形で面積が最大なものは図Pに示す1辺の長さ1mの正方形であることは自明である．また，長方形の中で面積が最大なものは図Qの長方形で，その面積も1である．



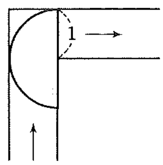
図P



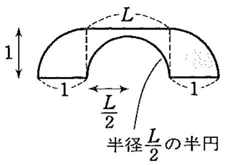
図Q

凸図形の中で面積が最大なのは半径1mの半円で，その面積は，$\frac{\pi}{2} \fallingdotseq 1.570$ である(図R)．

凸でない場合は複雑になるが，生徒達は粘土などで実験し，電話の受話器のような形の図形(図S)に到達していた．



図R



図S

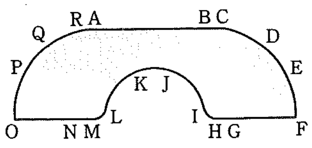
すなわち，図Sのように，縦1，横Lの長方形から半径$\frac{L}{2}$の半円を削って，更に，両端に半径1の円の$\frac{1}{4}$をつけた図形を考える．この図形の面積は

$$S=\frac{\pi}{2}+L-\frac{\pi L^2}{8} \quad (0<L<2)$$

ゆえに，$L=\frac{4}{\pi}$ のとき最大になり，その面積は $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi} \fallingdotseq 2.2074$ になる．でも両端が4分の1の円弧でなくてもっと違う曲線で囲まれた図形の方がよさそうだという意見を出した生徒もいた．彼はそういう用語は使わなかったが伸開曲線のような曲線などを暗示していたのではないかと推測できる．

簡単な考察により，この通路を通過できる平面図形は面積$2\sqrt{2}$以下でなければならないことが分かる．このことより，2.2074 と $2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.82$ の間に求める最大面積の値があることになるが，果たしていくつかは未解決問題である．

現在知られている最良の解は面積が約2.2195の図形(図T)で，これは1980年前後に，米国のラトガー大学のガーバーやベル研究所のローガンによって独立に見つけられた(スチュアート教授の面白数学入門 I. Stewart著，山崎秀紀，坂井公，田中裕一共訳，日経サイエンス社より引用)．おそらく，これが真の解だろうと予想されている．



図T

図の説明
- AB は直線　BC は半径$\frac{1}{2}$の円弧
- CD は円の伸開線
- DE は円の伸開線
- EF は円の伸開線の伸開線
- FG は直線　GH は半径$\frac{1}{2}$の円
- HI は円の伸開線
- IJ は円の伸開線の伸開線
- JK は円の伸開線
- KL から RA は対称的に定義される

謝辞

本稿作成のため，東海大学の中村義作教授，大矢建正教授や学園オリンピック数学部門の先生方に御尽力いただきました．この場を借りて感謝申し上げます．

(東海大学教育研究所)

追補　1辺の長さ10cmの立方体を長方形の包み紙で包むとき，包み紙の最小面積を問う，本コンテストの第1問(ラッピング問題)は数研通信 No. 27 が出版された直後に全面的に解決されました．最小面積は$(600+\varepsilon)\,\mathrm{cm}^2$で，$\varepsilon$は任意の正数です．関心のある方は筆者までお問い合わせ下さい．