出題可能な「曲線の長さ」の問題

大沢（おおさわ）　健一（けんいち）

（まえがき）

積分の授業において，曲線の長さの出題をしようと問題を作成しているとき，その問題にオリジナリティがないことを痛切に感じる．それは，高校生にとって積分計算が可能であるように問題を作成しようとすると，形が決まってきてしまうからである．

例えば，ごく簡単な曲線 $y=x^2\,(0\leqq x\leqq 1)$ の様なものでも，

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

となり，計算不可能となってしまう．（実際は $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}$ で置換することを知っていれば可能）

そこで，高校生にとって曲線の長さを求められるものはどんなものか，その曲線を表す式の形を探りたいと考えたわけである．

（注）

この文章において「積分可能」であるとは，高校生が不定積分が求められる，または，定積分の値が求められる場合をいうことにする．

曲線の長さを求める公式は，

1. $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$,　　2. $\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

の 2 つがあるので場合分けをして考える．

1.　$y=f(x)$ で表わされるもの

(ア) $1+(y')^2$ が定数のときに積分可能である．

つまり，y' が定数のときである．

$\therefore$ $\boldsymbol{y=ax+b}$　（a，b は任意）

（ただし，この場合は直線であるので積分の問題としては不適切である．）

(イ) $1+(y')^2$ が 1 次式のときに積分可能である．

つまり，$(y')^2$ が 1 次式のときである．

$\therefore$ $y'=\sqrt{ax+b}$ または $y'=-\sqrt{ax+b}$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=\dfrac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+c}$

（ただし，$a\neq 0$，b と c は任意）

さて，(ア)，(イ)以外で考えられるのは，根号がとれる場合であろう．つまり，$1+(y')^2$ が積分可能な関数 $g(x)$ を使って $1+(y')^2=\{g(x)\}^2$ …… Ⓐ

となる場合であろう．

そこで，次の場合を考えてみる．

(ウ)　$y'=px^m-\dfrac{1}{4p}x^{-m}$　$(p\neq 0)$

なる関数を考えると，

$$1+(y')^2=p^2x^{2m}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16p^2}x^{-2m}$$
$$=\left(px^m+\frac{1}{4p}x^{-m}\right)^2$$

となり，上のⒶの条件を満たす．

これより，$m\neq\pm 1$ のとき

$$y=\frac{p}{m+1}x^{m+1}-\frac{1}{4p(1-m)}x^{1-m}+q$$

（$p\neq 0$，q は任意）

また，$m=\pm 1$ のときから（同じ解を得る）

$$y=\frac{p}{2}x^2-\frac{1}{4p}\log x+q\quad(p\neq 0,\ q\ は任意)$$

という解を得る．

さて，この考えを更に一般化させて

$y'=p\{h(x)\}^m-\dfrac{1}{4p}\{h(x)\}^{-m}$ を考えると

（$h(x)$ は積分可能）

$$1+(y')^2=p^2\{h(x)\}^{2m}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16p^2}\{h(x)\}^{-2m}$$
$$=\left[p\{h(x)\}^m+\frac{1}{4p}\{h(x)\}^{-m}\right]^2$$

となりⒶの条件を満たす．

よって　$y'=p\{h(x)\}^m-\dfrac{1}{4p}\{h(x)\}^{-m}$ から y を求めることができ，なおかつ

$\sqrt{1+(y')^2}=p\{h(x)\}^m+\dfrac{1}{4p}\{h(x)\}^{-m}$ が積分可能ならばよい．

ゆえに，まとめると，

積分可能な $\{h(x)\}^m$，$\{h(x)\}^{-m}$ を使って

$$\boldsymbol{y'=p\{h(x)\}^m-\frac{1}{4p}\{h(x)\}^{-m}}$$

と表せる $y=f(x)$ が求めるものである．

（ただし，$p\neq 0$）

この場合の $h(x)$ の具体的な例としては，

$h(x)=ax^n$，$h(x)=a^x$ など．

$m=1$ の場合ならば

$h(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$，$h(x)=\sin x$，…

などが，考えられる．

特に $h(x)=e^x$，$m=\dfrac{1}{a}$，$p=\dfrac{1}{2}$ なら

$$y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\quad y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

のカテナリー（懸垂線）となる．

(エ) $1+(y')^2=\{g(x)\}^2$ …… Ⓐから

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad 1+\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}$$

が思い出される．これより

$y'=\pm\tan x$，$y'=\pm\dfrac{1}{\tan x}$ を満たす

$$\boldsymbol{y=\pm\log|\cos x|+p,\quad y=\pm\log|\sin x|+q}$$

（p，q は任意）

も求めるものであることがわかる．

2．媒介変数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ で表される場合

（注）ただし，媒介変数 t を消去して $y=f(x)$ として表すことができる場合は，1に含まれるので除いて考える．

さて，この場合 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\{g(t)\}^2$ …Ⓑ

と表され，根号がとれる場合を考えてみるのが妥当であろう．そこで次の場合を考える．

(オ) $\dfrac{dx}{dt}=t^m\pm\sqrt{2}$，$\dfrac{dy}{dt}=t^{-m}\pm\sqrt{2}$ …… ㋔

（複号同順）

すると，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=(t^m+t^{-m}\pm\sqrt{2})^2$

となるので㋔から求められる $x(t)$，$y(t)$ は求めるものとなる．

この考えを1の(ウ)と同様に一般化させて

$$\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt}=\{h(t)\}^m\pm\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{\dfrac{dy}{dt}=\{h(t)\}^{-m}\pm\sqrt{2}}\ \text{（複号同順）}\end{cases}\quad\cdots\cdots ㋔'$$

（$\{h(x)\}^m$，$\{h(t)\}^{-m}$ は積分可能）

から求められる $x(t)$，$y(t)$ は上と同様に条件を満たすので求めるものとなる．

具体的な例としては $\{h(t)\}^m$，$\{h(t)\}^{-m}$ が積分可能であるものなので1の(ウ)と同様である．

さて，その他の場合について高校教科書，参考書で扱われるサイクロイド，アステロイドにヒントを得よう．

〈サイクロイド〉

$x=a(t-\sin t)$，$y=a\cos t$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+(-a\sin t)^2$$
$$=\left(2a\sin\frac{t}{2}\right)^2$$

〈アステロイド〉

$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}a\cdot\sin 2t\cdot\cos t\right)^2$$
$$+\left(\frac{3}{2}a\cdot\sin 2t\cdot\sin t\right)^2$$
$$=\left(\frac{3}{2}a\cdot\sin 2t\right)^2$$

2つの場合は(オ)と同様に

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\{g(t)\}^2\quad\cdots\cdots Ⓑ$$

（$g(t)$ は積分可能）

の条件を満たしている．これより，次の2つの場合を得る．

(カ) サイクロイドの場合にヒントを得ると

$$\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt}=h(t)\cdot(1\pm\cos 2pt)} \\ \boldsymbol{\dfrac{dy}{dt}=\pm h(t)\cdot\sin 2pt}\end{cases}\quad\cdots\cdots ㋕$$

を考えると，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\{2h(t)\sin pt\}^2$$

（または，$\{2h(t)\cos pt\}^2$）

となり上のⒷの条件を満たす．残る条件としては，㋕から $x(t)$，$y(t)$ が求められること，それから $2h(t)\sin pt$（または $2h(t)\cos pt$）が積分可能であることである．

ここで　$h(t)\sin pt$ と $h(t)\sin 2pt$，

$h(t)\cos pt$ と $h(t)\cos 2pt$

の積分可能性は重複するので，結局，㋕から求め

られる $x(t)$, $y(t)$ を見つけ出す条件としては「$h(t)\sin pt$, $h(t)\cos pt$ がともに積分可能ならばよい」ということになる.

$h(t)$ の例としては $h(t)=t$, $h(t)=e^t$ などがある.

(キ) アステロイドの場合にヒントを得ると

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=h(t)\cos pt \\ \dfrac{dy}{dt}=\pm h(t)\sin pt \end{cases} \quad \cdots\cdots ㊖$$

を考えると

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\{h(t)\}^2$ となり上と同様にⒷの条件を満たす. 残る条件としては㊖から $x(t)$, $y(t)$ が求められること, それから $h(t)$ が積分可能であることである.

ゆえに, ㊖から求められる $x(t)$, $y(t)$ を見つけ出す条件としては「$h(t)$, $h(t)\cos pt$, $h(t)\sin pt$ がともに積分可能ならばよい」ということになる.

$h(t)$ の例としては㋕と同じである.

(注)

(1) 公式 2 の方で求めた㋔㋕㊖の $x(t)$ と $y(t)$ はもちろん交換してもよい.

(2) 問題集等であげられる〈エピ・サイクロイド〉

$$\begin{cases} x=a(4\cos t-\cos 4t) \\ y=a(4\sin t-\sin 4t) \end{cases}$$

(定数 4 はそれ以外の定数もありうる)

については,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=8a\cdot\cos\dfrac{5}{2}t\cdot\sin\dfrac{3}{2}t \\ \dfrac{dy}{dt}=8a\cdot\sin\dfrac{5}{2}t\cdot\sin\dfrac{3}{2}t \end{cases}$$

となり, ㊖の $h(t)$ を $h(t)=8a\sin\dfrac{3}{2}t$ とした場合なので㊖に含まれる.

(おわりに)

いままであげた(ア)〜(キ) 以外にも

$$\begin{cases} x=-2\cos^3 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$$

(91. 島根医大)

のような例などがあるが, 整理できる範囲において述べることはできたと思う. 今後の研究課題としてこの整理できる範囲を更に広げていきたいと考える.

(静岡県立磐田南高等学校)