自然数の巾和

坂本　茂（さかもと　しげる）

小学生ガウスは $1+2+3+\cdots+n$ の計算の仕方を考えて先生を驚かせたといわれる．では一般に

$$S_m(n)=1^m+2^m+\cdots+n^m \quad (m=0,1,\cdots) \qquad ①$$

の計算はどうであろうか．S_1 が少年ガウスであり，S_2 や S_3 もアラビアの数学者に知られていたようである．高等学校の数学教科書では k の恒等式 $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ で k を1から n まで変えた n 個の式の和を作り S_2 の式を求めている．この方法は以下のように S_m 式を求めるのに拡張される．

$r<m$ について S_r が分かっていれば $S_m=\sum_{k=1}^{n}k^m$ 式を計算することができる．それは $k^{m+1}-(k-1)^{m+1}=-\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m+1-r}{}_{m+1}\mathrm{C}_r k^r$ において $k=1,2,\cdots,n$ とした n 個の式を加えると左辺は n^{m+1} であり

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left\{n^{m+1}+\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{m+1-r}{}_{m+1}\mathrm{C}_r S_r(n)\right\} \qquad ②$$

と表されるからである．この n の多項式は $r<m$ である S_r を用いて計算され複雑になるので，S_m をもっと簡単に計算できたら都合がよい．

もう1度 $k^{m+1}-(k-1)^{m+1}$ で k についての和を検討してみると，これは $S_{m+1}(n)-\{S(n)-1\}^{m+1}$ と表せそうである．これは形式的であって展開したとき $S^r(n)=S_r(n)$ としなければならない．これによると

$$S_{m+1}(n)-\{S(n)-1\}^{m+1}=n^{m+1} \qquad ③$$

のように簡単に表示できる．また，多項式 $S_m(n)$ で n を実数とみて微分すると，同様に $S'(n)^r=S_r'(n)$ と形式的に書くことにより

$$S_{m+1}'(n)-\{S'(n)-1\}^{m+1}=(m+1)n^m \qquad ④$$

と表される．多項式 $S_m(n)$ に定数項はなく $S_m(0)=0$ であるが，1次の項 n の係数を問題にし B_m としてみよう．すると $B_m=S_m'(0)$ であるから上式で $n=0$ とおき $S_{m+1}'(0)=\{S'(0)-1\}^{m+1}$ より

$$B_\nu=(B-1)^\nu, \qquad \nu>1 \qquad ⑤$$

と表される．ここで展開したとき $B^r=B_r$ を表すものである．この式を漸化式とし順次数列 B_1，B_2，B_3，… が定まる．

いま，関数 $f(k)=(k+B)^{m+1}$ を考えよう．ただし，この展開においても $B^r=B_r$ とするものとする．実際 $f(k)$，$f(k-1)$ を展開してみれば

$$f(k)=(k+B)^{m+1}=\sum_{r=0}^{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_r B_r k^{m+1-r} \qquad ⑥$$

$$f(k-1)=(k+B-1)^{m+1}=\sum_{r=0}^{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_r (B-1)^r k^{m+1-r} \qquad ⑦$$

となる．ただし $B_0=1$ とする．$r\geqq2$ のとき $B_r=(B-1)^r$ であるから $f(k)-f(k-1)=(m+1)k^m$ が成り立ち，形式的には

$$(k+B)^{m+1}-(k+B-1)^{m+1}=(m+1)k^m \qquad ⑧$$

で表される．ここで $k=1,2,\cdots,n$ とした n 個の式を加え合わせれば

$$f(n)-f(0)=(n+B)^{m+1}-B^{m+1}=(m+1)S_m(n) \qquad ⑨$$

すなわち，$(m+1)S_m(n)=f(n)-f(0)$ であり形式的に

$$S_m(n)=\frac{(n+B)^{m+1}-B_{m+1}}{m+1}=\frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}{}_{m+1}\mathrm{C}_r B_r n^{m+1-r} \qquad ⑩$$

として表され計算できるのである．ここで $B^r=B_r$ である．

なお念のため注意しておくと，多項式の展開は一意的であり⑦式は

$$f(k-1)=(k+B-1)^{m+1}=\sum_{r=0}^{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_r(-1)^r(k+B)^{m+1-r}=\sum_{r=0}^{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_r(k-1)^r B^{m+1-r}$$

などとして展開していっても $B^r=B_r$ とすれば同じである．

数列 $\{B_r\}$ は $B_\nu=(B-1)^\nu$ により定義されるも

のとする．したがって $\nu=2,3,\cdots$ とし，次の式で順次定められる．

$$\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{\nu-i}{}_{\nu}C_iB_i=B_\nu$$

$B_0=1,\ B_1=1/2,\ B_2=1/6,\ B_3=0,$
$B_4=-1/30,\ \cdots$

となるが以後，奇数番は 0 である．

よって $\nu=2m+1,\ i=2j$ として

$$-1+\frac{1}{2}(2m+1)-\sum_{j=1}^{m}{}_{2m+1}C_{2j}B_{2j}=0$$

と書ける．ここで $(-1)^jB_{2j}$ を改めて $B_j>0$ とおけば

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^j{}_{2m+1}C_{2j}B_j+m-\frac{1}{2}=0 \tag{11}$$

となり $B_1=1/6,\ B_2=1/30,\ \cdots$ である．この改められた B_rにより

$$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m=\frac{n^{m+1}}{m+1}+\frac{n^m}{2}+\sum_{r=1}^{[m/2]}\frac{{}_mC_{2r-1}}{2r}B_rn^{m-2r+1} \tag{12}$$

として自然数の巾和 $S_m(n)$ は表される．

以上はベルヌイが類推によって得たといわれる式の証明である．数列 $\{B_r\}$ を $B_\nu=(B+1)^\nu$ で定義すると $f(k+1)-f(k)=(m+1)k^m$ が得られるが，B_1 の符号が違うだけである．この式の和をとり $S_m(n)$ が求められる．なお，以下の式を二項定理と比較するとよい．

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r$ ：二項定理

$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rf^{(n-r)}g^{(r)}$ ：Leibniz の定理

$(B+t)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rB_rt^{n-r}$ ：$(B-1)^n=B_n$

……後記……

k についての和を $(k+1)^{m+1}-k^{m+1}$ でとれば

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left\{(n+1)^{m+1}-1-\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m+1}C_rS_r(n)\right\}$$

を得る．この式と②式の和(差)をとった式を作れば $r<m$ において m が偶数なら r が奇数(偶数)だけの $S_r(n)$ から，m が奇数なら r が偶数(奇数)だけの $S_r(n)$ から $S_m(n)$ が求められる．これにより高校時代の大晦日の晩に $S_{11}(n)$ まで計算することができた．

$$k(k+1)\cdots(k+r)(k+r+1)-(k-1)k(k+1)\cdots(k+r)$$
$$=k(k+1)\cdots(k+r)(r+2)$$

この恒等式で k の 1 から n までの和を作ると

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+r)=\frac{1}{r+2}n(n+1)\cdots(n+r+1)$$

となる．これを利用しても $S_m(n)$ は計算できるし，また，恒等式 ${}_{n+1}C_{r+1}=\sum_{k=r}^{n}{}_kC_r$ も利用できる．

自然数 k の関数 $\varphi(k)$ で，一般に

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\varphi(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\varphi(k)=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\varphi(k)$$

が成り立つ．ここで $\varphi(k)=k^{m-1}$ を代入し

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}k^{m-1}$$

または，$\varphi(k)=\dfrac{k\{(n+1)^{m-1}-k^{m-1}\}}{(n+1)-k}$ とおき

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=\frac{n(n+1)^m}{2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\varphi(k)$$

を得る．これらは以前，結川義明先生が数研通信に発表された式で，これから $S_m(n)$ を求めている．

$r<m$ の $S_r(n)$ を使わないで $S_m(n)$ を得る⑫式の存在を高校卒業後に知った．証明は指数的母関数

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

により定義されるベルヌイ多項式 $B_n(x)$ を勉強するまでは出来なかった．そして $B_n(x)$ の性質を調べているうちに②式が導かれた．これを基に $B_n(x)$ を用いない⑫式の証明が期待されたのである．

No. 25 で渡邊了梧先生の定積分による考察においては $B_0(x)=1$ とし $B_n(x)$ を $n\geqq1$ に対し漸化式 $B_n'(x)=nB_{n-1}(x),\ B_n(1)=B_n(0)$ で定義し $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$ を導いたことになるわけである．そして形式的に表わされる $B_n(x)=(x+B)^n$ と同じものであることを示した．ここで B_n は形式的に $B_n=(1+B)^n$ で定める．よって $B_n=B_n(1)=B_n(0)$ である．

この $S_m(n)$ の研究で n を実数と見たが，更には z を複素数とするゼータ関数 $\zeta(z)=S_{-z}(\infty)$ が整数の世界に寄与することが想像される．

(東京都立新宿高等学校)