Irisunaの定理と共線定理，共点定理について

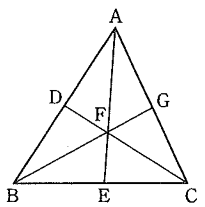
(Menelaosの定理・Cevaの定理を含む)

入砂(いりすな)　七五三一(しめいち)

1．はじめに

数研通信19号ではIrisunaの定理がどんな定理なのかを発表した．また，数研通信22号では，第2定理からの発展として，線束の定理を発表した．今回の発表は，更にIrisunaの定理の発展として，共線定理，共点定理を発表します．また，これらがオリジナルなものか否かを問うものであります．次に，これらの定理を証明するために，すでに発表した関連する定理を列挙します．

2．Irisunaの定理



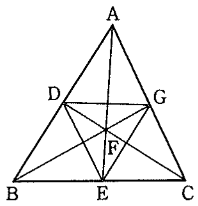
三角形ABCの頂点A，B，Cと内部の点Fとを結ぶ直線が，対辺AB，BC，CAと交わる点をそれぞれD，E，Gとする．点Pは△ABCの周および内部の線分上を動くものとする．点Pが線分ADからDBあるいは線分ABからBDへ動くとき“返り点”の個数は，それぞれ0，1であるという．

また，それぞれの線分の比を $\dfrac{AD}{DB}$，$\dfrac{AB}{BD}$ と表す．

他の場合も同様に定めると，*点Pが“返り点”0(個)または1(個)で動くとき，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

*返り点について，点Fからは1，その他の点からは0または1の動きとなる．

3．Irisunaの第2定理



Irisunaの定理で，動点Pが線分DG，GE，ED上は返り点0(個)で動き，他は返り点0(個)または1(個)で動くならば，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても，再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

4．共線，共点に関する定理

★定義　R_i^j は返り点1が i 個で j 個の比の積のこととする．(返り点0は $j-i$ 個)なお，動点Pはもとの点に戻るものとする．

例　R_2^3 は返り点1が2個で3つの比の積のことである．(返り点0は1個)

返り点と共線，共点の関係については，次の3つの定理が重要である．

【定理】 $R_3^3=1$ ならば，返り点を表す3点は一直線上にある．(図1)

[証明] $R_3^3=1$ つまり

$\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FE}{EA}=1$ … ① が成り立つならば，

直線AFとBCの交点をE′とすると，△ABCで，Irisunaの定理から，

$$\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FE'}{E'A}=1$$

①から $\dfrac{FE}{EA}=\dfrac{FE'}{E'A}$ … ②

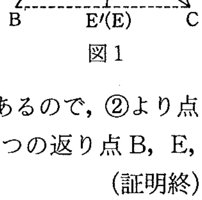


図1

また，点E，E′は直線AF上にあるので，②より点EとE′は一致する．よって，3つの返り点B，E，Cは一直線上にある．　(証明終)

【定理】$R_1^3=1$ ならば，返り点 0 または 1 を表す 3 点は一直線上にある．(図 2　証明略)

【定理】$R_0^3=1$ によってできる三角形において，返り点 0 を表す 3 点のそれぞれと頂点を結んだ 3 直線は 1 点で交わる．(図 3　証明略)

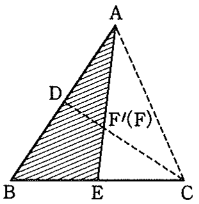


図　2

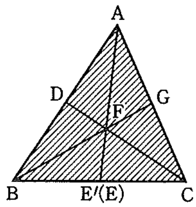


図　3

注)　これらの定理はメネラウスの定理，チェバの定理に相当する．

次に Irisuna の定理からの発展として，共線定理と第 3 定理を紹介し証明します．

5. (Irisuna の) 共線定理

$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ は

$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}=1$ とする．

【定理】四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA 上にそれぞれ点 E，F，G，H をとる．線分EG，HFの交点を I，線分ED，BHの交点を J とすると，$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ ならば，点 J，I，C は一直線上にある．逆も成り立つ．

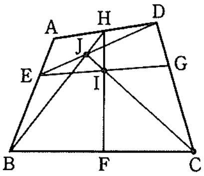


図　4

【証明】直線 JC と線分 EG，HF の交点をそれぞれ I′，I″ とすると，(図 5)

△DEC で，$R_1^3=1$ から

$$\frac{\mathrm{JI'}}{\mathrm{I'C}}=\frac{\mathrm{JE}}{\mathrm{ED}}\cdot\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GC}}$$

△ABD で，$R_2^4=1$ から

$$=\left(\frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}}\right)\cdot\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GC}}$$

仮定から

$$=\frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}$$

△HBC で，$R_1^3=1$ から

$$\frac{\mathrm{JI''}}{\mathrm{I''C}}=\frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}$$

よって　$\dfrac{\mathrm{JI'}}{\mathrm{I'C}}=\dfrac{\mathrm{JI''}}{\mathrm{I''C}}$

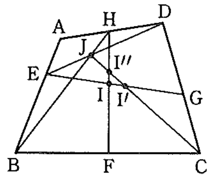


図　5

点 I′ と I″ は線分 JC 上の 2 点であるから，I′ と I″ は一致する．つまり，直線 HF と EG との交点 I に一致する．よって，点 J，I，C は一直線上にある．

逆に，点 J，I，C が一直線上にあるならば，

$$\sigma(\mathrm{ABCDA})=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}$$

$$=\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\left(\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\right)\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}$$

△ABD で，$R_2^4=1$ から

$$=\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EJ}}\cdot\frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}$$

△CDE で，$R_1^3=1$ から

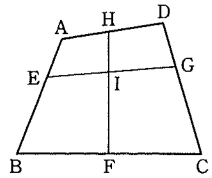
$$=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{IJ}}\cdot\frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}$$

△BCH で，$R_1^3=1$ から　　$=1$

よって，点 J，I，C が一直線上にあるならば，$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ である．　(証明終)

6. (Irisuna の) 第 3 定理

【定理】四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA 上の点をそれぞれ E，F，G，H として，$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ を満たしているとする．また，直線 EG，FH はただ 1 点 I で交わるとする．動点Pが“返り点”0，1 で四角形 ABCD の周および内部の線分上を動くものとすると，点 A，B，C，D，E，F，G，H，I のどこから動いても，再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は 1 である．



この第 3 定理は，次の補題から，証明される．

《補題》$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ ならば，
$\sigma(\mathrm{AEIHA})=1$ が成り立つ．

【補題の証明】（図 4 参照）

$$\sigma(\mathrm{AEIHA})=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}}\cdot\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GI}}\cdot\frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FH}}\cdot\frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{DA}}$$

仮定から，共線定理より，点 J，I，C は一直線上にあるから，△DEC，△BCH で，$R_3{}^3=1$ から

$$=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}}\cdot\left(\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DJ}}\cdot\frac{\mathrm{JC}}{\mathrm{CI}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{CJ}}\cdot\frac{\mathrm{JB}}{\mathrm{BH}}\right)\cdot\frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{DA}}$$

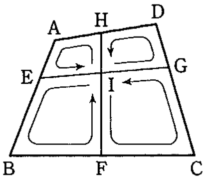
△ABD で $R_4{}^4=1$ から　$=1$

よって，$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ ならば，

$\sigma(\mathrm{AEIHA})=1$ が成り立つ．（証明終）

注）ベクトルによる別証がある．

【第 3 定理の証明】



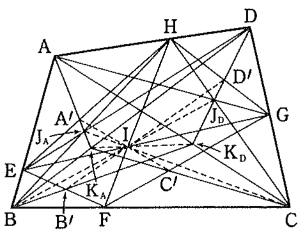
線分の消去，線分の分割の補題によって，動点 P が“返り点” 0, 1 で動いて，もとの点に戻ってできる図形は，小四角形の連鎖で描かれる．補題によると，どの小四角形についても $R_4{}^4=1$ が成立する．ゆえに，動点 P によって描かれる図形に対応する線分の比の積は，$R_4{}^4=1$ を表す線分の比の積となる．よって，動点 P がもとの点に戻るときの線分の比の積は 1 である．

（証明終）

（Irisuna の）第 3 定理，共線定理からの発展として，次の共点定理を得た．

7.（Irisuna の）共点定理

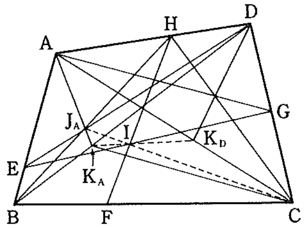
【定理】 四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA 上にそれぞれ点 E，F，G，H をとり $\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ とする．HF と EG の交点を I，ED と BH の交点を $\mathrm{J_A}$ とする．直線 $\mathrm{AJ_A}$ と EH, BD の交点を A′，$\mathrm{K_A}$ とする．同様に AG と HC の交点を $\mathrm{J_D}$，直線 $\mathrm{DJ_D}$ と HG，AC の交点を D′，$\mathrm{K_D}$ とする．また，$\mathrm{BK_D}$ と EF の交点を B′，$\mathrm{CK_A}$ と FG の交点を C′ とする．このとき，5 直線 $\mathrm{J_AC}$，$\mathrm{J_DB}$，$\mathrm{K_AK_D}$，A′C′，B′D′ は 1 点 I で交わる．



【証明】

[1] 直線 $\mathrm{J_AC}$，$\mathrm{J_DB}$ が点 I で交わることは，仮定より $\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ であるから，共線定理により明らかである．

[2] 直線 $\mathrm{K_AK_D}$ が点 I で交わることを証明する．



[1] から点 $\mathrm{J_A}$，I，C は一直線上にある．

△$\mathrm{AK_AC}$ で $R_1{}^3=1$ となることを導く．

△ABD で $R_2{}^3=1$ から

$$\frac{\mathrm{AK_A}}{\mathrm{K_AJ_A}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HJ_A}}\ \cdots\ ①$$

△HBC で $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{\mathrm{J_AI}}{\mathrm{IC}}=\frac{\mathrm{J_AH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\ \cdots\ ②$$

△ACD で $R_0{}^3=1$ から

$$\frac{\mathrm{CK_D}}{\mathrm{K_DA}}=\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}\ \cdots\ ③$$

①×②×③から

$$\frac{\mathrm{AK_A}}{\mathrm{K_AJ_A}}\cdot\frac{\mathrm{J_AI}}{\mathrm{IC}}\cdot\frac{\mathrm{CK_D}}{\mathrm{K_DA}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}$$

仮定から　　　　$=1$

つまり，△$\mathrm{AK_AC}$ で $R_1{}^3=1$ が成り立つので，返り点 $\mathrm{K_A}$，I，$\mathrm{K_D}$ は一直線上にある．

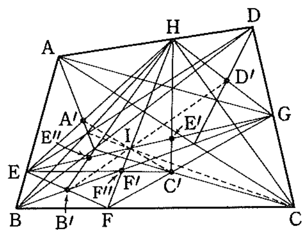
（4. の共線に関する定理）

よって，直線 $\mathrm{K_AK_D}$ は点 I で交わる．

[3] 直線 A′C′，B′D′ は点 I で交わることを証明する．

△HEC′ で $R_0{}^3=1$ となることを導く．

EG と HC′，FH と EC′ のそれぞれの交点を E′，F′ とする．



$\triangle$HFG で $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{HE'}{E'C'}=\frac{HI}{IF}\cdot\frac{FG}{GC'}\ \cdots ①$$

$\triangle$EFG で $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{C'F'}{F'E}=\frac{C'F}{FG}\cdot\frac{GI}{IE}\ \cdots ②$$

$\triangle$ABD で $R_2{}^3=1$ から

$$\frac{EA'}{A'H}=\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AD}{DH}\ \cdots ③$$

①×②×③から

$$\frac{HE'}{E'C'}\cdot\frac{C'F'}{F'E}\cdot\frac{EA'}{A'H}$$

$$=\frac{HI}{IF}\cdot\frac{FC'}{C'G}\cdot\frac{GI}{IE}\cdot\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AD}{DH}$$

σ(ABCDA)=1 であるから，$\triangle$BCD で $R_0{}^3=1$ で，$R_2{}^3=1$ となるから，

$$=\frac{HI}{IF}\cdot\left(\frac{FB}{BC}\cdot\frac{CD}{DG}\right)\cdot\frac{GI}{IE}\cdot\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AD}{DH}$$

(Irisuna の) 第 3 定理から

$=1$

よって，$\triangle$HEC′ で $R_0{}^3=1$ であるから，直線 A′C′ は点 I で交わる．

同様にして，$\triangle$HB′G で $R_0{}^3=1$ となることを導くことができる．

つまり，EG と HB′，FH と B′G のそれぞれの交点を E″，F″ とすると，

$$\frac{HE''}{E''B'}\cdot\frac{B'F''}{F''G}\cdot\frac{GD'}{D'H}$$

$$=\left(\frac{HI}{IF}\cdot\frac{FE}{EB'}\right)\cdot\left(\frac{B'F}{FE}\cdot\frac{EI}{IG}\right)\cdot\left(\frac{GC}{CD}\cdot\frac{DA}{AH}\right)$$

整理して

$$=\frac{HI}{IF}\cdot\left(\frac{FB'}{B'E}\right)\cdot\frac{EI}{IG}\cdot\frac{GC}{CD}\cdot\frac{DA}{AH}$$

$\triangle$ABC で $R_0{}^3=1$ から，$R_2{}^3=1$ となるから

$$=\frac{HI}{IF}\cdot\frac{FC}{CB}\cdot\frac{BA}{AE}\cdot\frac{EI}{IG}\cdot\frac{GC}{CD}\cdot\frac{DA}{AH}$$

(Irisuna の) 第 3 定理から

$=1$

よって，$\triangle$HB′G で $R_0{}^3=1$ であるから，直線 B′D′ は点 I で交わる．

以上 [1]，[2]，[3] より共点定理が成り立つ．

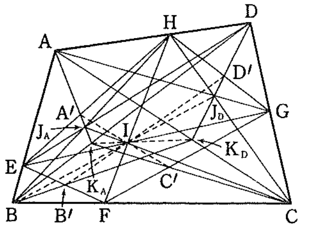
(証明終)

注) GB と DF，FA と EC のそれぞれの交点を J_C，J_B とすると，直線 J_CA，J_BD も点 I で交わる．

共線定理から次のようにも作図していくことができます．

8. (Irisuna の) 共点定理の系

【定理】 四角形 ABCD の辺 AD，BC 上に点 H，F をとる．辺 AB 上に点 E をとり ED，BH の交点を J_A とする．J_AC と HF の交点を I とする．直線 EI と CD の交点を G とする．AG，CH の交点を J_D とする．直線 AJ_A と EH，BD の交点を A′，K_A，直線 DJ_D と HG，AC の交点を D′，K_D とする．BK_D と EF の交点を B′，CK_A と FG の交点を C′ とする．このとき 4 直線 K_AK_D，J_DB，A′C′，B′D′ は直線 J_AC，HF，EG の交点 I で交わる．



【証明】 点 J_A，I，C が一直線上であるから，(Irisuna の) 共線定理 (逆) により，σ(ABCDA)=1 となる．したがって，(Irisuna の) 共点定理から明らかとなる．

(証明終)

9. 応用

Irisuna の定理を用いて次の問題を解こう．

問題 1　共線定理で σ(AEIHA)=1 ならば，点 J，I，C は一直線上にあることを証明せよ．

問題 2　補題で σ(AEIHA)=1 ならば，σ(ABCDA)=1 を証明せよ．

問題 3　(Irisuna の) 第 3 定理で，動点 P が少なくとも 1 つの小四角形を含んだ図形 S を描いて，もとの点に戻り，$\sigma(S)=1$ ならば，第 3 定理が成り立つか．このことを調べよ．

問題 4　四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA 上に，それぞれ点 E，F，G，H をとり，σ(ABCDA)=1 とするならば，3 直線 AC (対角線)，EF，HG は 1 点で交わる．逆も成り立つ．このことを証明せよ．
(EF $\not\parallel$ HG とする)

10. 成果と今後の課題

Irisunaの定理を発展させて得たいくつかの定理については，これまでにも発表して，専門家ならびに関係者の意見を求めてきましたが，今回の定理についても検討をお願いしたいと思います．更に，球面や多面体あるいは曲面でのIrisunaの定理の発展を研究しているので，是非発表の機会を得たいと思います．また，Irisunaの定理の応用として“しめちゃんのボール”(代表元のimage 20個)はIrisunaの定理のモデルとして，成果の1つと考えています．(資料参照)とくに，Irisunaの定理を教育の現場にどのように具現化していくのかが，今後の大きな課題の1つであります．

《参　考　文　献》

1） 岩田至康 編：幾何学大辞典，槇書店

2） 清宮俊雄 著：幾何学一発見的研究法一，科学新興社

3） 入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，平成5年度県立学校教職員個人研究研究集録(愛知県教育委員会)(1994.3)

4） 入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，数研通信19号，数研出版(1994.5)

5） 入砂七五三一：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について一Irisunaの定理一，日数教学会誌第76巻臨時増刊，日数教三重大会提案資料(1994.8)

6） 入砂七五三一：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について一Irisunaの定理の発展一，平成6年度愛知県高等学校数学研究会尾張地区研究発表大会提案資料(1995.2)

7） 入砂七五三一：Irisunaの定理(メネラウスの定理・チェバの定理を含む)，I. F. Report 第22号，財団法人石田財団(1995.3)

8） 入砂七五三一：Irisunaの定理，数研通信22号，数研出版(1995.4)

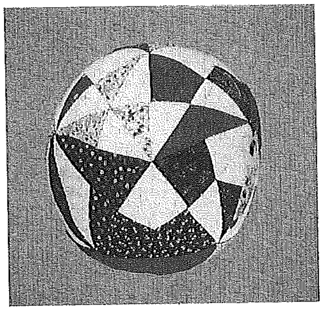
9） 入砂七五三一：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について一Irisunaの定理一，研究集録愛数33号(愛知県高等学校数学研究会)(1995.5)

10） 入砂七五三一：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理の発展について一Irisunaの定理一，日数教学会誌第77巻臨時増刊，日数教東京大会提案資料(1995.8)

《参　考　資　料》

次のIrisunaのボール(しめちゃんのボール)は，Irisunaの定理，第2定理を表す代表元20個のimageによって，デザインされている．また，(Irisunaの)連鎖定理の1つのモデルである．

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆



しめちゃんのボール1993.11.発表　　　　商標権，意匠登録済

(愛知県立一宮興道高等学校)