三角形の内心，重心，？心

小原　實晃（おはら　じっこう）

はじめに

数学Aの「平面幾何」は，あまり授業されていないようである．

教科として「平面幾何」の“ねらい”をどこにおくかによって，その扱い方は大きく違ってくると思われるが，“問題演習の場”として扱うならば，数学A「平面幾何」に盛られている内容はすべて教えることができる．他の分野(不等式，ベクトル，三角法等)の応用として，それらを活躍させる場として，「平面幾何」はすごく豊かな内容を秘めているのである．

私は，高1数学のカリキュラムの中で，他の分野にからめて，「平面幾何」の内容をすべて扱うことに成功しました．その一端を紹介いたします．

§1．ある最大・最小問題

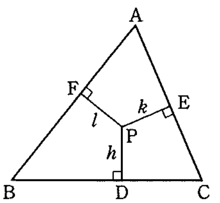
問題1

Pを△ABCの内部の点とし，D，E，Fをそれぞれ辺BC，CA，ABにPから下ろした垂線の足とする．

このとき，

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

を最小にする点Pの位置を決定せよ．



〔解答〕

3辺BC，CA，ABの長さをそれぞれ a，b，c とし，PD，PE，PFの長さをそれぞれ h，k，l とする．

すると，△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bk+\frac{1}{2}cl$$

と表され，$ah+bk+cl=K$ (一定) となる．

$$L=\frac{a}{h}+\frac{b}{k}+\frac{c}{l}$$

とおく．

Lを最小にするような点Pの位置と，KLを最小にする点Pの位置とは同じである．ところが

$$KL=(ah+bk+cl)\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}+\frac{c}{l}\right)$$
$$\geqq(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)^2=(a+b+c)^2$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{等号} \iff \sqrt{ah}\Big/\sqrt{\frac{a}{h}}=\sqrt{bk}\Big/\sqrt{\frac{b}{k}}=\sqrt{cl}\Big/\sqrt{\frac{c}{l}} \\ \qquad\iff h=k=l\end{array}\right)$$

であるから，KLは $h=k=l$ のとき最小値

$$(a+b+c)^2$$

をとる．

したがって，Lを最小にするためには，点Pを△ABCの**内心**にとればよい．▨

〔注〕 ① 不等式と最大・最小

$$M\leqq C\ (\text{一定})$$

で等号が成り立つとき M の最大値は C である．また，Kが正の定数のとき

$$KM\leqq C\ (\text{一定})$$

で等号が成り立つとき M の最大値は C/K．

② コーシー・シュヴァルツの不等式

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$$
$$\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

$$\text{等号} \iff \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

問題2

問題1で，積

$$PD\cdot PE\cdot PF$$

を最大にする点Pの位置を決定せよ．

〔解答〕 相加・相乗平均の不等式から

$$(ah)(bk)(cl)\leqq\left(\frac{ah+bk+cl}{3}\right)^3$$
$$=\frac{K^3}{27}$$

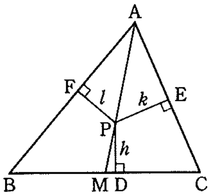
ゆえに　$hkl\leqq\dfrac{K^3}{27abc}$ (一定)

$$\text{等号} \iff ah=bk=cl$$

したがって，積 hkl を最大にするためには，点P を△ABC の**重心**にとればよい．▨

〔注〕 $ah=bk=cl$

が成り立つとき，Pは△ABC の重心である．



(∵) $bk=cl$ から

△PAC＝△PAB

よって，AP と BC の交点を M とすると

CM＝BM

すなわち，AP は中線である．

$ah=cl$ から，同様に，BP も中線であることがわかる．

したがって，Pは△ABC の重心である．

§2．ケガの功名

問題3

問題1で，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$h^2+k^2+l^2 \geqq \frac{K^2}{a^2+b^2+c^2}$$

また，等号が成り立つときPは重心に一致することを示せ．

〔解答〕 (前半)

コーシー・シュヴァルツの不等式から

$$(a^2+b^2+c^2)(h^2+k^2+l^2) \geqq (ah+bk+cl)^2=K^2$$

ゆえに $h^2+k^2+l^2 \geqq \dfrac{K^2}{a^2+b^2+c^2}$

等号 $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{h}=\dfrac{b}{k}=\dfrac{c}{l}$

(後半) ？ ▨

この「問題3」は，宿題として与えたのだが，翌朝T君が「点Pは重心と一致しない」と言って来た．

実は，この「問題3」はある有名な参考書からいただいたもので，私は自分で確かめもしないで生徒に与えたのである．

その日の授業で，クラスのみんなに深く謝り，「では，点Pは実際はどこか，みんなで考えよう．」と提案し，共同で探究をはじめた．

それから2日後に，Pの位置を探り当てることに成功した！

以下にかいつまんで，そのプロセスを報告する．

〔探究〕

まず，一般の三角形では

$$ah=bk=cl$$

と $\dfrac{a}{h}=\dfrac{b}{k}=\dfrac{c}{l}$

は両立しないから，T君の“意見”は正しい(つまりPは重心ではない！)．

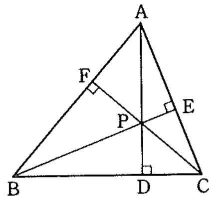
次に，比の式

$$\frac{a}{h}=\frac{b}{k}=\frac{c}{l}$$

からの「感じ」では

垂心

ではないのかとの予想が立つ．



しかし，△ABC が直角三角形であると，比の式そのものが成り立たなくなる(分母が0となる)．

外心でないことは比の式から既に自明である．

垂心でないことはわかったが，“垂心の近傍”であることは疑いない！

生徒の注意は「垂心三角形」(△$H_1H_2H_3$) に集中していったのである．

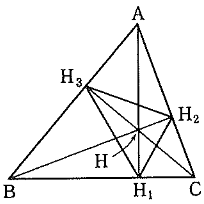
(Pが垂心に一致するときの△DEF を特に

垂心三角形

と呼ぼう．一般の場合は

垂足三角形

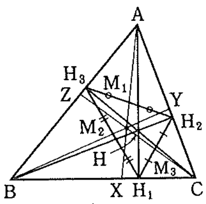
と呼ぼう．)



そして，ついに，上記のT君があることに気づいたのである．

「垂心三角形の各辺の中点と頂点 A，B，C とを結ぶ3直線は，1点で交わる」

のではないか!?



“共点問題”はチェヴァの定理で処理しよう．

$$\left.\begin{array}{l}\text{AM}_1\text{ と BC の交点を X}\\ \text{BM}_2\text{ と CA の交点を Y}\\ \text{CM}_3\text{ と AB の交点を Z}\end{array}\right\}\text{とするとき}$$

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

が成り立てばよい！

《証明》──→ 問題 4

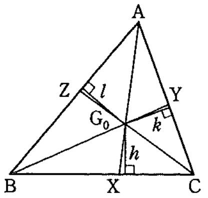
さて，T君の発見したこの点をT点 (G_0) と名付けることにする．

Pがこの G_0 に一致するとき，たしかに

$$\frac{a}{h}=\frac{b}{k}=\frac{c}{l}$$

が成り立つ．

《証明》 ──→ 問題 5



かくして，Pが G_0 に一致するとき

$$(a^2+b^2+c^2)(h^2+k^2+l^2)$$
$$=(ah+bk+cl)$$
$$=4(\triangle ABC)^2$$

が成り立つことがわかった．美しい！

このように，幸いにも，見事な解決に到ったから良かったものの，もし，Pの位置が見つからなかったら……と，感動と同時に"冷や汗"に襲われたものである．ケガの功名！

(くだんの参考書に感謝する.)

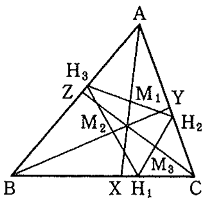
問題 4

次のことを示せ．

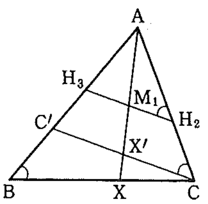
$$\frac{BX}{XC}=\frac{c^2}{b^2}$$

$$\frac{CY}{YA}=\frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{b^2}{a^2}$$



〔解答〕 垂心三角形の性質から



$\triangle AH_2H_3 \backsim \triangle ABC$

ゆえに，$H_2H_3 /\!/ CC'$

とすると

$\triangle ACC' \backsim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{AC'}{AC}=\frac{AC}{AB}$$

$$\therefore AC'=\frac{b^2}{c} \cdots\cdots ①$$

一方，メネラウスの定理から

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CX'}{X'C'}\cdot\frac{C'A}{AB}=1 \cdots\cdots ②$$

また，$H_2M_1=M_1H_3$ から $CX'=X'C'$

したがって，①，②から

$$\frac{BX}{XC}=\frac{AB}{C'A}=\frac{c^2}{b^2}$$

同様にして

$$\triangle BH_3H_1 \backsim \triangle BCA \text{ から } \frac{CY}{YA}=\frac{a^2}{c^2}$$

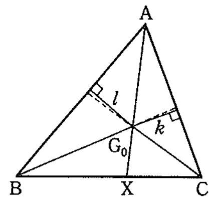
$$\triangle CH_1H_2 \backsim \triangle CAB \text{ から } \frac{AZ}{ZB}=\frac{b^2}{a^2}$$

問題 5

Pが G_0 に一致するとき

$$\frac{a}{h}=\frac{b}{k}=\frac{c}{l}$$

が成り立つことを示せ．

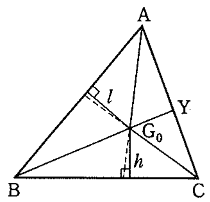


〔解答〕

$$\frac{bk}{cl}=\frac{\triangle G_0AC}{\triangle G_0AB}$$

$$=\frac{CX}{BX}=\frac{b^2}{c^2}$$

$$\therefore \frac{c}{l}=\frac{b}{k}$$

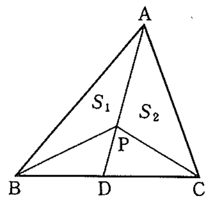


$$\frac{cl}{ah}=\frac{\triangle G_0BA}{\triangle G_0BC}$$

$$=\frac{AY}{CY}=\frac{c^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{a}{h}=\frac{c}{l}$$

〔注〕 右図でPがAD上の任意の点のとき



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BD}{CD}$$

$$(\because) \quad \frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{BD}{CD}$$

$$\frac{\triangle PBD}{\triangle PCD}=\frac{BD}{CD}$$

$$\text{よって} \quad \frac{\triangle ABD-\triangle PBD}{\triangle ACD-\triangle PCD}=\frac{BD}{CD}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{BD}{CD}$$

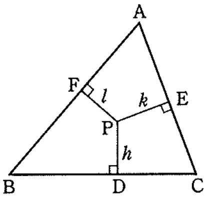
〔付1〕 問題5の"逆"

$$\frac{a}{h}=\frac{b}{k}=\frac{c}{l} \Longrightarrow P=G_0$$

は，ほぼ直観的に明らかであろう．(対偶をとる.)

さて，問題1～3を扱うことから次のような副産

物が得られた．



$h=k=l \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{I}$

$ah=bk=cl \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{G}$

$\dfrac{a}{h}=\dfrac{b}{k}=\dfrac{c}{l} \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{G_0}$

であることがわかったのだから，一般に

$\boxed{} \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\boxed{}$

という形で△ABCの特殊点の位置を表せないか，と考えたのである．

そこで，$h=k=l$ を座標のように $(1,1,1)$ と表してみよう．

つまり $(1,1,1) \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{I}$ (内心)

すると，$ah=bk=cl$ は

$$h:k:l=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

ということだから

$$\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right) \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{G}\ (\text{重心})$$

次に，$\dfrac{a}{h}=\dfrac{b}{k}=\dfrac{c}{l}$ は

$$h:k:l=a:b:c$$

となり

$$(a,b,c) \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{G_0}\ (\text{T点})$$

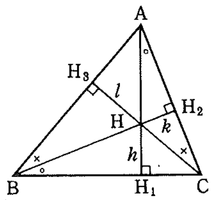
これは美しい！

それでは(調子にのって)…というわけで，次のことがわかった．

$$(\cos A,\ \cos B,\ \cos C) \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{O}\ (\text{外心})$$

$$\left(\frac{1}{\cos A},\ \frac{1}{\cos B},\ \frac{1}{\cos C}\right) \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{H}\ (\text{垂心})$$

例えば，垂心について；(右図)



$\mathrm{BH_1}=c\cos B$

$\mathrm{AH_2}=c\cos A$

$\mathrm{CH_2}=a\cos C$

$\mathrm{BH_3}=a\cos B$

$\triangle \mathrm{HH_2A} \backsim \triangle \mathrm{HH_1B}$ から

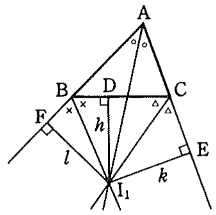
$$h:k=\cos B:\cos A=\frac{1}{\cos A}:\frac{1}{\cos B}$$

$\triangle \mathrm{HH_3B} \backsim \triangle \mathrm{HH_2C}$ から

$$k:l=\cos C:\cos B=\frac{1}{\cos B}:\frac{1}{\cos C}$$

更に調子にのって，△ABCの外部の点にも上記のような“座標”を与えてみようと考えた．

例えば，傍心について；



$\mathrm{P}=\mathrm{I_1}$ (第一傍心)

のとき，$h=k=l$ であるが

$h<0$ と考えて

$(-1,1,1)$

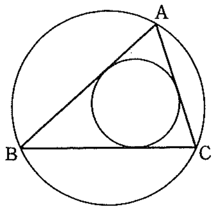
とする．そして

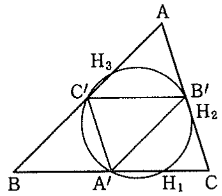
$(1,-1,1) \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{I_2}$

$(1,1,-1) \Longleftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{I_3}$

このように，△ABCの3辺を基準にして，平面上の全ての点に座標 $h:k:l$ を与えることができれば，次は“図形の方程式”を考えることができるだろう．

例えば，





外接円：$akl+blh+chk=0$

内接円：$\cos\dfrac{A}{2}\sqrt{h}+\cos\dfrac{B}{2}\sqrt{k}+\cos\dfrac{C}{2}\sqrt{l}=0$

九点円：　　　？

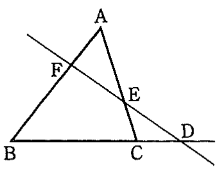
〔付2〕 問題3で，チェヴァの定理(逆)とメネラウスの定理を用いた．

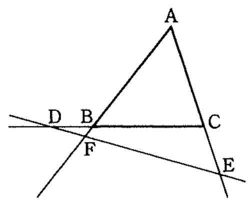
この定理は，“逆”を用いる場面が多い(共点，共線)が，比を求める(表す)場面ではもちろん“正”が用いられる．(逆は正を用いて証明される！)

ところで，チェヴァの定理はそれ自体として重要(便利)であるが，実はメネラウスの定理に含まれているのである．

ここで，メネラウスの定理を土台にして，いろいろな定理を導いてみよう．

まず，メネラウスの定理を確認しておく．





> △ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上(延長上)の 3 点(**メネラウス点**)をそれぞれ D，E，F とするとき
>
> D，E，F は共線 $\Longleftrightarrow \dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

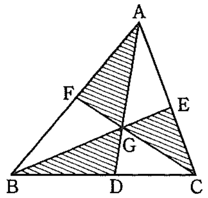
〔注〕 D，E，F が共線となるのは，

①1 点だけが外分点

②3 点が外分点

の 2 通りの場合しかない．②の場合を特に「外メネラウスの定理」と呼ぶことにする．

《例 1》 3 本の**チェヴァ線** AD，BE，CF が 1 点 G で交わっているとする．



△ABD にメネラウスの定理を適用して(以下「にメネラウスの定理を適用して」を省略する)

$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DG}{GA}=1$ …… ①

△ACD $\dfrac{AG}{GD}\cdot\dfrac{DB}{BC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$ …… ②

△BAE $\dfrac{BF}{FA}\cdot\dfrac{AC}{CE}\cdot\dfrac{EG}{GB}=1$ …… ③

△BCE $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CA}{AE}\cdot\dfrac{EG}{GB}=1$ …… ④

△CAF $\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AB}{BF}\cdot\dfrac{FG}{GC}=1$ …… ⑤

△CBF $\dfrac{CD}{DB}\cdot\dfrac{BA}{AF}\cdot\dfrac{FG}{GC}=1$ …… ⑥

次に，斜線部に外メネラウスの定理を適用して

△AFG $\dfrac{AB}{BF}\cdot\dfrac{FC}{CG}\cdot\dfrac{GD}{DA}=1$ …… ⑦

△BDG $\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DA}{AG}\cdot\dfrac{GE}{EB}=1$ …… ⑧

△CEG $\dfrac{CA}{AE}\cdot\dfrac{EB}{BG}\cdot\dfrac{GF}{FC}=1$ …… ⑨

以上から，いろいろの比積の式を導いてみよう．

①×②から

$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$ (チェヴァの定理)

①÷⑧から

$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BE}{EG}\cdot\dfrac{GD}{DA}=1$

(△GAB に対する外チェヴァの定理)

①÷(⑦×⑧)から $\dfrac{AF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GE}\cdot\dfrac{EB}{BA}=1$ (?!)

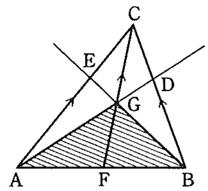
その他，いろいろの比積の式を導くことができる．(ただ，……=1 になったからといってそれだけでは，逆がなくては，何にもならないが．)

〔注〕 外チェヴァの定理について；

上の①÷⑧から得られた比積の式について見直してみる．

△GAB の 3 頂点から引いた 3 本のチェヴァ線が 1 点 C で交わっている．3 本のチェヴァ線と 3 辺(延長)との交点が

F，E，D



である．このとき，次が成り立つ．

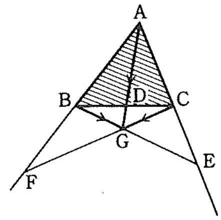
$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BE}{EG}\cdot\dfrac{GD}{DA}=1$

(逆も成り立つ．)

3 本のチェヴァ線の交点が三角形の外にできる場合なので，特に「外チェヴァの定理」と呼ぶ．

$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

(逆も成り立つ．)

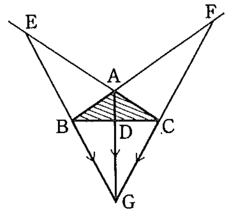


(∵) △ABE にメネラウス

$\dfrac{EC}{CA}\cdot\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BG}{GE}=1$ …… ①

△BEC にメネラウス

$\dfrac{BG}{GE}\cdot\dfrac{EA}{AC}\cdot\dfrac{CD}{DB}=1$ …… ②



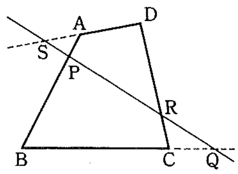
①÷②から

$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

《例 2》 四角形 ABCD の 4 辺(延長)上に 4 点 P，Q，R，S がある．

P，Q，R，S が共線ならば

$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RD}\cdot\dfrac{DS}{SA}=1$

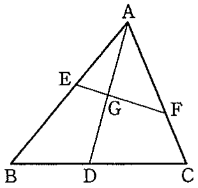


(∵) B，D を結び△ABD と △BCD にメネラウスを用いる．

《例 3》 右の図で

$$\frac{EG}{GF}\cdot\frac{FA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BA}{AE}=1$$

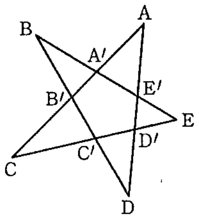
が成り立つ.



《例 4》 下の図で

$$\frac{AA'}{A'B}\cdot\frac{BB'}{B'C}\cdot\frac{CC'}{C'D}\cdot\frac{DD'}{D'E}\cdot\frac{EE'}{E'A}=1$$

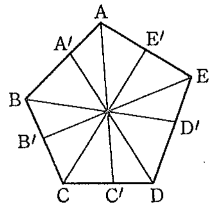
が成り立つ.



《例 5》 下の図で

$$\frac{AA'}{A'B}\cdot\frac{BB'}{B'C}\cdot\frac{CC'}{C'D}\cdot\frac{DD'}{D'E}\cdot\frac{EE'}{E'A}=1$$

が成り立つ.



'95.9.13

（高知県土佐塾高等学校）