パスカルの三角形で楽しむ

仁平（にへい） 政一（まさかず）

1. はじめに

図1は「パスカルの三角形」と呼ばれていることは周知の通りである．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

図1

一見なんの変哲もないように見えるが，このパスカルの三角形には，驚くほど面白いことが，含まれている．

本稿では三項係数($(a+b+c)^3$ の展開式の係数)とパスカルの三角形との関係，正接の倍角の公式とパスカルの三角形との関係について述べる．

2. 三項係数とパスカルの三角形

二項係数とパスカルの三角形との関係については述べるまでもないことと思われるが，話の都合上少し触れよう．

例えば，$(a+b)^2$ の展開式の係数は，
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ より，(1, 2, 1) であり，
$(a+b)^3$ の展開式の係数は，同様にして，
(1, 3, 3, 1) であることがわかる．これらの数字の組は，それぞれ図1のパスカルの三角形の上から3段目，4段目に対応している．

それでは，三項係数とパスカルの三角形との関係はどうなるのだろうか．このような疑問を抱くことはごく自然なことであろう．

いま，$(a+b+c)^n$ の展開式を考えてみると

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n \\
&={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}(b+c)+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}(b+c)^r \\
&\quad+\cdots+{}_nC_n(b+c)^n
\end{aligned}
$$

となる(n はもちろん正の整数とする)．

ここで，a^{n-r} の係数を b に注目して，その降べきの順に並べると

$${}_nC_r\cdot{}_rC_0,\ {}_nC_r\cdot{}_rC_1,\ {}_nC_r\cdot{}_rC_2,\ \cdots,\ {}_nC_r\cdot{}_rC_r$$

となる．これは ${}_nC_r$ を(${}_rC_0$, ${}_rC_1$, ${}_rC_2$, …, ${}_rC_r$)に掛けたものとみなせる(例えば，ベクトルのスカラー倍などをイメージに浮かべればよいだろう)．

この単純な事実は，$(a+b+c)^n$ の展開式の係数がパスカルの三角形を利用して，次々と求められることを示している．

このことを $(a+b+c)^3$ を例にとって説明しよう．

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
(1 & & 3 & & 3 & & 1)
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}\otimes
\begin{pmatrix}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}
 & & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & \\
 & 3 & & 6 & & 3 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{pmatrix}
$$

記号⊗は「対応部分の各行を掛け合わせる」を意味する．

図2

図2の最右端が $(a+b+c)^3$ の展開式の係数を表している．もっと詳しく述べれば

$$
\left(\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & \\
 & 3 & & 6 & & 3 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\longrightarrow\ a^3\text{ の係数}\\
\longrightarrow\ a^2b,\ a^2c\text{ の係数}\\
\longrightarrow\ ab^2,\ abc,\ ac^2\text{ の係数}\\
\longrightarrow\ b^3,\ b^2c,\ bc^2,\ c^3\text{ の係数}
\end{array}
$$

図3

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^3\\
&=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c\\
&\quad+3bc^2+c^3
\end{aligned}
$$

となることがわかる(以上のアイディアは文献[1]による)．

同様にして，$(a+b+c)^n$ 展開式を順次求めることができる．この様子は図4のように，きれいに図示することができる(図は筆者の工夫したものである)．

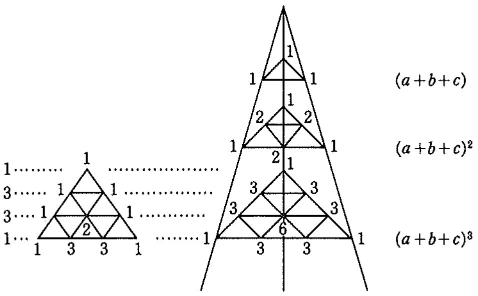

図4

図4に更に一段加えて，$(a+b+c)^4$ の展開式を求めてみませんか．

3. 正接の倍角の公式とパスカルの三角形

三角関数における正接の2倍角の公式は

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

であり，正接の3倍角の公式は

$$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

であることは周知の通りである．それでは，4倍角の公式はどうなるのだろうか．特別に必要としない限り，目に触れることは少ないであろう．

ところで，パスカルの三角形を利用すると，正接の倍角の公式を次々と苦労することなく，作ることができる．このことは以前から知られているが，ここでは，その背景を複素平面と De Moivre の定理(数学 B の範囲)で利用して探ってみよう．

実軸を除く複素平面 $\{\alpha+i\beta \mid \alpha\neq 0\}$ から実数への写像

$$\psi:\alpha+i\beta\longrightarrow\beta/\alpha$$

を作る．この写像を，単位円周上の $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ に適用すれば，その像は $\tan\theta$ となる．したがって

$$e^{in\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k \quad\cdots\cdots ①$$

に適用すれば，ψ による像は，

$e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$ より，

$$\tan n\theta=\{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k+1}\cos^{n-2k-1}\theta\sin^{2k+1}\theta\}$$
$$\div\{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta\}$$
$$=\{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k+1}\tan^{2k+1}\theta\}$$
$$\div\{\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_{2k}\tan^{2k}\theta\}$$

となることがわかる．ここに，記号$[x]$は x を越えない最大の整数を表す．すなわちガウス記号である．

これが正接の倍角の公式である．これにより，写像 ψ がパスカルの三角形と正接の倍角の公式を結びつけていることがわかる．

念のため具体例をあげておこう．

$$(1 \quad 2i \quad i^2)\longrightarrow(1 \quad 2i \quad -1)\xrightarrow{\psi}\begin{bmatrix} & 2 & \\ 1 & & -1\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$(1 \quad 3i \quad 3i^2 \quad i^3)\longrightarrow(1 \quad 3i \quad -3 \quad -i)$$
$$\xrightarrow{\psi}\begin{bmatrix} & 3 & & -1\\ 1 & & -3 & \end{bmatrix}\longrightarrow \tan 3\theta$$
$$=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$(1 \quad 4i \quad 6i^2 \quad 4i^3 \quad i^4)\longrightarrow(1 \quad 4i \quad -6 \quad -4i \quad 1)$$
$$\xrightarrow{\psi}\begin{bmatrix} & 4 & & -4 & \\ 1 & & -6 & & 1\end{bmatrix}\longrightarrow \tan 4\theta$$
$$=\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$$

図5

このようにして，面白いように $\tan n\theta$ の公式を得ることができる．

なお，①の実部，虚部をとれば $\cos n\theta$，$\sin n\theta$ が得られる．前者は $\cos\theta$ の n 次多項式，後者は $\cos\theta$ の$(n-1)$次多項式に $\sin\theta$ を掛けた形になっていることがわかる．

参 考 文 献

〔1〕 早川学而，数学教育論文集(非売品) 昭和54年，pp.82--92
〔2〕 吉田 武，オイラーの贈物，海鳴社，1993年，pp.12—16，180—182，201—216
〔3〕 泉 信一他編，共立数学公式，共立出版，昭和56年，p.57

(茨城県立藤代高等学校)