隣接2項間漸化式についての一考察

神　正剛（じん　せいごう）

[1] 解法技術の背景について

$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n+s$ …… ①

なる2項間の漸化式を解くための技術として

$\alpha=r\alpha+s$ …… ②

なる α を考え，①−②より

$a_{n+1}-\alpha=r(a_n-\alpha)$ として解く方法が普通であるが，この背景について考察する．すなわち『なぜ，$\alpha=r\alpha+s$ なる α を考えるに至るか』について考えたい．

数列 $\{a_n\}$ の各項をベクトルの成分として考えると次のように数列を無限次元ベクトル $\vec{x}$ とみなすことができる．

$$\vec{x}=(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots)$$

また　$S\vec{x}=(a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots)$ とおくと，S はこの無限次元ベクトル空間上の線型変換である．更にいま $\vec{s}=(s, s, s, \cdots\cdots)$ とおくと，①を，$S\vec{x}=r\vec{x}+\vec{s}$ …… ③ とみなすことができる．③を満たす $\vec{x}$ を求めることが①を解くことに他ならない（③は $\vec{x}$ について非線形である）．③の特別解の1つを $\overrightarrow{x_0}$ とすると，

$$S\overrightarrow{x_0}=r\overrightarrow{x_0}+\vec{s} \quad \cdots\cdots \text{④}$$

この $\overrightarrow{x_0}$ を1つ発見すれば③−④から

$$S(\vec{x}-\overrightarrow{x_0})=r(\vec{x}-\overrightarrow{x_0})$$

となり線型化される．$n\geqq 2$ に対して

$$S^{n-1}(\vec{x}-\overrightarrow{x_0})=r^{n-1}(\vec{x}-\overrightarrow{x_0})$$

より両辺の第1成分を比較することによって

$$a_n-c_n=r^{n-1}(a_1-c_1)$$

が得られ a_n が決定される（上式は $n=1$ のときも成り立つ．また，ここで $\overrightarrow{x_0}=(c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots)$ とおいている）．

では，④の特別解 $\overrightarrow{x_0}$ はどのようにして見つけることができるかであるが，いま

$$\vec{\alpha}=(\alpha, \alpha, \alpha, \cdots\cdots)$$

を考えると，

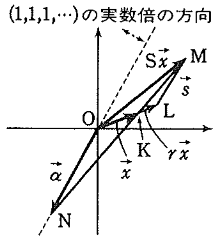
$S\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$ であるから

もしも　$\vec{\alpha}=r\vec{\alpha}+\vec{s}$ なる $\vec{\alpha}$ を見つけることができればこれは $S\vec{\alpha}=r\vec{\alpha}+\vec{s}$ ということであるからこの $\vec{\alpha}$ は④の $\overrightarrow{x_0}$ の1つとして考えられる．つまり②の α を考えるということは④の特別解 $\overrightarrow{x_0}$ の1つを考えることに対応している訳である．

[2] 矢線ベクトルによる図形的イメージについて

$\vec{\alpha}=(\alpha, \alpha, \alpha, \cdots\cdots)$ と $\vec{x}$，$S\vec{x}$ は図形的にどのような位置関係にあり，このような $\vec{\alpha}$ を考えることと $\vec{\alpha}=r\vec{\alpha}+\vec{s}$ なる等式との関係は図形的にはいかなるものかについて考えたい．そのために $\vec{x}$，$\vec{\alpha}$ などを図では平面ベクトルのように表して考えることにする．

(i) $r>1$ のとき



$\vec{x}$，$r\vec{x}$，$S\vec{x}$ の終点をそれぞれK，L，Mとする．またMKの延長と原点を通り $(1, 1, 1, \cdots)$ 方向の直線（図の点線）との交点をNとする．

図の $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{\alpha}$ として選ぶ．そうすると図で，$\vec{s}$ と $\vec{\alpha}$ は平行であるから $\triangle\mathrm{KLM}\backsim\triangle\mathrm{KON}$ でありその相似比は $\mathrm{OK}:\mathrm{KL}=1:r-1$

したがって，$S\vec{x}-\vec{x}=(r-1)(\vec{x}-\vec{\alpha})$

つまり，$S\vec{x}-\vec{\alpha}=r(\vec{x}-\vec{\alpha})$ …… ⑤

ここで，$S\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$ より⑤は

$$S(\vec{x}-\vec{\alpha})=r(\vec{x}-\vec{\alpha})$$

となり，$\vec{x}-\vec{\alpha}$ は決定される．

また $\mathrm{ON}:\mathrm{LM}=1:r-1$ であるからベクトルの向きも考慮することにより

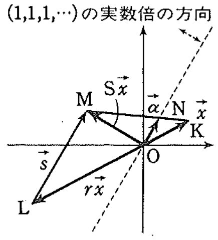
$$\vec{s}=-(r-1)\vec{\alpha}$$

であることがわかり，したがって

$$\vec{a}=r\vec{a}+\vec{s} \cdots\cdots ⑥$$

なる等式が必然的に出てくる訳である.
つまり図形的には△KLM と相似な三角形を得るために⑥のような $\vec{a}$ を考える訳である.

(ii) $r<1$ $(r\neq 0)$ のとき符号が正負の場合があるが全く同様なのでここでは $r<0$ のときについて考える.



(i)と同様に △KLM∽△KON であり,
KN : KM=KO : KL=1 : $(1-r)$
したがって, $S\vec{x}-\vec{x}=(1-r)(\vec{a}-\vec{x})$
つまり, $S\vec{x}-\vec{a}=r(\vec{x}-\vec{a})$
よって, $S(\vec{x}-\vec{a})=r(\vec{x}-\vec{a})$ から $\overrightarrow{x-a}$ は決定される.
また ON : LM=1 : $(1-r)$ より

$$\vec{s}=(1-r)\vec{a}$$

よって $\vec{a}=r\vec{a}+\vec{s}$ が出てきて, (i)と同様のことが言える.

[3] まとめ

数列をベクトルと考え, ベクトル空間内の線型変換 S (これをずらし変換と呼んでも許されるのではないかと思う) で移されたベクトルの終点と元のベクトルの終点が $\vec{a}$ の終点から眺めると, ちょうど重なって見えるからこの $\vec{a}$ はとても大事なベクトルであると言える.

正にベクトル空間の中で $\vec{a}$ だけ平行移動することによりベクトル (あるいは数列) 達の間に比例という好ましい関係を生み出し, 扱いを簡単にすることが②の a を考える理由であると思われる. 昔, ピラミッドの高さを測るためにピラミッドと棒の影の長さを用いたという話は有名であるがこの隣接2項間漸化式を解く技術も結局はこの話と全く同じ精神で成り立っているということが言えるのではないかと思う.

(青森明の星高等学校)