方程式 $a^{a^{\cdots^{a^x}}}=x$ の実数解の個数について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

1．はじめに

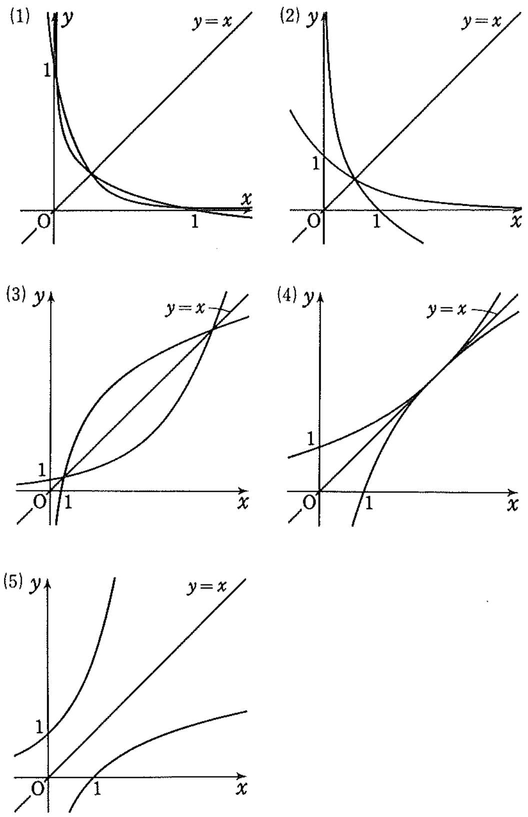
鈴木久夫先生は数研通信 No. 18 で

$$a^x=\log_a x \qquad (a^x=x) \qquad ①$$

の実数解について，

(1)	$0<a<\dfrac{1}{e^e}$	のとき	3 個 (1 個)
(2)	$\dfrac{1}{e^e}\leqq a<1$	のとき	1 個 (1 個)
(3)	$1<a<e^{\frac{1}{e}}$	のとき	2 個 (2 個)
(4)	$a=e^{\frac{1}{e}}$	のとき	1 個 (1 個)
(5)	$a>e^{\frac{1}{e}}$	のとき	0 個 (0 個)

と分類されています．



(1) の場合　$a^x=x$ 以外の実数解を γ，δ $\left(0<\gamma<\dfrac{1}{e}<\delta<1\right)$ とする．x_1 が $a^x=\log_a x$ の解ならば a^{x_1} も $a^x=\log_a x$ の解になるので $\delta=a^\gamma$，$\gamma=a^\delta$ となっている．

ところで　$a^x=\log_a x \iff a^{a^x}=x$

が成り立つから，(1)～(5)は $a^{a^x}=x$ の実数解についての分類となる．更に一般化して，

$$a^{a^{\cdots^{a^x}}}=x$$

の実数解について考えてみた．

2. $a^{a^{\cdots^{a^x}}}=x$ の実数解の個数について

$f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$ とおき，

$f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $(n=2,3,\cdots)$ で $f_n(x)$ を定義する．

また，方程式 $f_n(x)=x$ の実数解の集合を F_n と書くことにする．すなわち

$$\mathrm{F}_n=\{x\,|\,f_n(x)=x,\ x \text{ は実数}\}$$

まず，次の事実を確認しておく．

> $f_2(x)$ は増加関数である．

(証明)　$x_1<x_2$ とする．

(i)　$a>1$ のとき

$f(x)$ は増加関数であるから，$f(x_1)<f(x_2)$ より

$f(f(x_1))<f(f(x_2))$

$\therefore\ f_2(x_1)<f_2(x_2)$

(ii)　$0<a<1$ のとき

$f(x)$ は減少関数であるから，$f(x_1)>f(x_2)$ より

$f(f(x_1))<f(f(x_2))$

$\therefore\ f_2(x_1)<f_2(x_2)$ ▨

> n が偶数のとき　$\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_2$

(証明)　$x_0<f_2(x_0) \Longrightarrow x_0<f_n(x_0)$

を示す．$f_2(x)$ は増加関数であるから，$x_0<f_2(x_0)$ より　$f_2(x_0)<f_2(f_2(x_0))=f_4(x_0)$

同様にして　$f_4(x_0)<f_6(x_0)$，… が成り立つから

$$x_0<f_2(x_0)<f_4(x_0)<f_6(x_0)<\cdots<f_n(x_0)$$

すなわち

$$x_0<f_n(x_0)$$

が成り立つ．

$x_0>f_2(x_0)$ のときは　$x_0>f_n(x_0)$　が成り立つ．

以上のことから

$$f_2(x_0)\neq x_0 \Longrightarrow f_n(x_0)\neq x_0$$

対偶をとると

$$f_n(x_0)=x_0 \Longrightarrow f_2(x_0)=x_0$$

よって　$\mathrm{F}_n\subseteqq \mathrm{F}_2$

$\mathrm{F}_2\subseteqq \mathrm{F}_n$ は明らかに成り立つから $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_2$ ▨

$a>1$ のときは，$f_1(x)$ が増加関数であることを利用して次のことがいえる．

$\boxed{a>1 \text{ のとき } \mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1}$

$\boxed{n\text{が奇数のとき } \mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1}$

(証明)　$a>1$ のときは $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1$ であるから $n\geqq 3$，$0<a<1$ のとき証明すればよい．

$x_0<f(x_0)$ と仮定すると，$f_2(x)$，…，$f_{n-1}(x)$ は増加関数であるから

$$f_{n-1}(x_0)<f_{n-1}(f(x_0))=f_n(x_0)$$

$x_0\geqq f_n(x_0)$ が成り立つとすれば

$f_{n-1}(x_0)<f_n(x_0)\leqq x_0$ から $f_{n-1}(x_0)<x_0$

$f(x)$ は減少関数であるから $f(f_{n-1}(x_0))>f(x_0)$

$x_0\geqq f_n(x_0)$ を用いると $x_0\geqq f_n(x_0)>f(x_0)$

となり $x_0<f(x_0)$ に反する．

よって $x_0<f_n(x_0)$

$x_0>f(x_0)$ のときは $x_0>f_n(x_0)$ が成り立つ．

以上のことから

$$f_1(x_0)\neq x_0 \Longrightarrow f_n(x_0)\neq x_0$$

よって　$\mathrm{F}_n\subseteqq \mathrm{F}_1$

$\mathrm{F}_1\subseteqq \mathrm{F}_n$ は明らかに成り立つから　$\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1$ ▨

3．集合 F_1，F_2 の要素の個数について

(1)　方程式　$f_1(x)=x$　すなわち　$a^x=x$ の実数解の個数

$$a^x=x \iff a=x^{\frac{1}{x}}$$

$y=x^{\frac{1}{x}}$ とおくと　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$0<x<e$ で $y'>0$，$e<x$ で $y'<0$ となるから $x=e$ で極大値 $e^{\frac{1}{e}}$ をとる．

$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0} e^{\frac{\log x}{x}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty} y=1$$

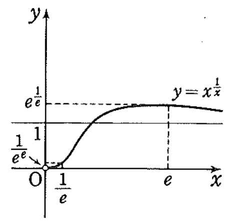
を用いて，$y=x^{\frac{1}{x}}$ のグラフをかき，$y=x^{\frac{1}{x}}$ と $y=a$ の共有点の個数を調べることにより，$x^{\frac{1}{x}}=a$ の実数解の個数は

$0<a<1$　のとき　1 個

$1<a<e^{\frac{1}{e}}$ のとき　2 個

$a=e^{\frac{1}{e}}$　のとき　1 個

$a>e^{\frac{1}{e}}$　のとき　0 個



(2)　方程式　$f_2(x)=x$　すなわち　$a^{a^x}=x$　の実数解の個数

$$a^{a^x}=x \iff a^x=\log_a x \iff a^x\log a=\log x$$

(Ⅰ)　$0<a<1$ のとき

$F(x)=a^x\log a-\log x$　とおくと

$$F'(x)=\frac{xa^x(\log a)^2-1}{x}$$

$g(x)=xa^x(\log a)^2-1$ とおくと

$$\lim_{x\to+0} g(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=-1$$

$$g'(x)=a^x(\log a)^3\left(x+\frac{1}{\log a}\right)$$

$0<x<-\dfrac{1}{\log a}$ で $g'(x)>0$，$x>-\dfrac{1}{\log a}$ で $g'(x)<0$ となるから $x=-\dfrac{1}{\log a}$ で極大値

$$g\left(-\frac{1}{\log a}\right)=\left(-\frac{1}{\log a}\right)a^{-\frac{1}{\log a}}(\log a)^2-1$$

$$=(-\log a)\cdot\frac{1}{e}-1 \qquad ②$$

(i)　$0<a<\dfrac{1}{e^e}$ のとき

$-\log a>e$ となるから　②から $g\left(-\dfrac{1}{\log a}\right)>0$

よって，$g(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつから，これを α，β $(\alpha<\beta)$ とおく．

x	0		α		β	
$F'(x)$	／	－	0	＋	0	－
$F(x)$	／	↘	極小	↗	極大	↘

$\alpha<-\dfrac{1}{\log a}<\beta$，$-\dfrac{1}{\log a}<\dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to+0} F(x)=\infty$，$F(1)=a\log a<0$，

$p_0=-\dfrac{1}{\log a}$ $\left(<\dfrac{1}{e}\right)$ とおくと $a^{p_0}=\dfrac{1}{e}$ で

$$F(p_0)=a^{p_0}\log a-\log p_0=\frac{1}{e}\left(-\frac{1}{p_0}\right)-\log p_0$$
$$=-\frac{1}{p_0}\left(\frac{1}{e}+p_0\log p_0\right)$$

$$F\left(\frac{1}{e}\right)=a^{\frac{1}{e}}\log a+1=e\left(a^{\frac{1}{e}}\log a^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}\right)$$

$F(p_0)$, $F\left(\frac{1}{e}\right)$ の符号を調べるために

$h(x)=x\log x \quad (0<x<1)$

とおき，増減を調べる．

$h'(x)=\log x+1$

$0<x<\frac{1}{e}$ で $y'<0$, $\frac{1}{e}<x$ で $y'>0$

$x=\frac{1}{e}$ で極小かつ最小で最小値 $h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ をとる．

よって $0<x<1$ で $h(x)+\frac{1}{e}\geqq 0$

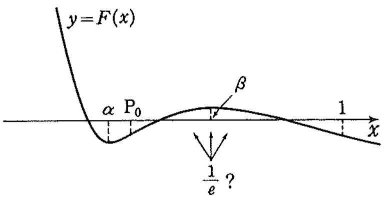
$\left(\text{等号は } x=\frac{1}{e} \text{ のときに限る}\right)$

$h(x)$ を利用すると

$$F(p_0)=-\frac{1}{p_0}\left\{h(p_0)+\frac{1}{e}\right\}<0 \quad \left(\because\ p_0<\frac{1}{e}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{e}\right)=e\left\{h(a^{\frac{1}{e}})+\frac{1}{e}\right\}>0 \quad \left(\because\ a^{\frac{1}{e}}<\frac{1}{e}\right)$$

以上のことから，$y=F(x)$ のグラフをかくと，方程式 $F(x)=0$ すなわち $f_2(x)=x$ の実数解は 3 個ある．



$\left(\beta \text{ と } \frac{1}{e} \text{ の大小比較すると } \beta<\frac{1}{e},\ \beta=\frac{1}{e},\ \beta>\frac{1}{e} \text{ のすべての可能性がある．}\right)$

(ii) $\frac{1}{e^e}\leqq a<1$ のとき

②から $g\left(-\frac{1}{\log a}\right)\leqq 0$

よって $g'(x)\leqq 0$ すなわち $F'(x)\leqq 0$ となり $F(x)$ は減少関数で，$\lim_{x\to+0}F(x)=\infty$, $F(1)=a\log a<0$ から方程式 $F(x)=0$ すなわち $f_2(x)=x$ の実数解は 1 個である．

(II) $a>1$ のとき

すべての自然数 n について，$F_n=F_1$ であったから，$F_2=F_1$ すなわち，方程式 $f_1(x)=x$ の実数解が $f_2(x)=x$ の実数解であり，これ以外には $f_2(x)=x$ の実数解は存在しない．

[注意] 3 (2)(I)(i)で $F(\beta)>0$ は次のように証明することができる．

$$g(\beta)=\beta a^{\beta}(\log a)^2-1=0,\quad -\frac{1}{\log a}<\beta,$$

$0<a<\frac{1}{e^e}$ のとき

$$F(\beta)=a^{\beta}\log a-\log\beta=\frac{1}{\beta(\log a)^2}\cdot\log a-\log\beta$$
$$=\frac{1-\beta\log\beta\log a}{\beta\log a}>0$$

を証明すればよいから，

$0<a<\frac{1}{e^e}$, $\beta>-\frac{1}{\log a}$, $\beta a^{\beta}(\log a)^2=1$

$\Longrightarrow 1-\beta\log\beta\log a<0$

$\Longleftrightarrow b>e^e$, $\beta>\frac{1}{\log b}$, $\beta(\log b)^2=b^{\beta}$

$\Longrightarrow 1+\beta\log\beta\log b<0 \quad \left(b=\frac{1}{a} \text{ とおいた}\right)$

$\Longleftrightarrow c>e$, $\beta>\frac{1}{c}$, $\beta c^2=e^{c\beta} \Longrightarrow 1+\beta c\log\beta<0$

$(c=\log b$ とおいた$)$

$\Longleftrightarrow c>e$, $r>1$, $rc=e^r \Longrightarrow 1+r\log\frac{r}{c}<0$

$(r=c\beta$ とおいた$)$

$\Longleftrightarrow \frac{e^r}{r}>e$, $r>1$

$\Longrightarrow 1+r\log r-r(r-\log r)<0$ (c を消去)

$\Longleftrightarrow r-1>\log r$, $r>1 \Longrightarrow 0<r^2-2r\log r-1$

$\Longleftrightarrow r>1 \Longrightarrow 0<r^2-2r\log r-1$

($r>1$ で常に $r-1>\log r$ は成立)

$G(r)=r^2-2r\log r-1 \quad (r>1)$ とおくと

$$G'(r)=2r-2\log r-2r\cdot\frac{1}{r}=2(r-1-\log r)>0$$

$G(r)$ は $[1,\ \infty)$ で増加関数で，$r>1$ のとき

$G(r)>G(1)=0$ から $G(r)>0$ ∴ $F(\beta)>0$ ▨

$F(\alpha)>0$ も同様に証明することができる．

〈参考文献〉

1. 鈴木久夫，「指数関数と対数関数の交点の分類について」，数研通信 No. 18

(栃木県立栃木高等学校)