数学発想物づくりコンテストの報告

前編

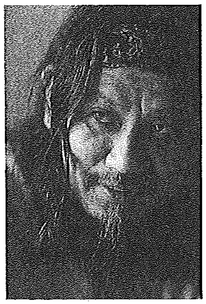
秋山（あきやま） 仁（じん）

中高生の半数以上が数学嫌いになってしまった現状を打破するために，数学関係者の中でいろいろな試みが活発に行われている．

数学をデキルようにさせることと，数学を好きにさせることの間には多少のギャップがあるが，私の所属する研究所ではまず，数学を好きになってもらうことが先決と考え，その方法を研究開発している．

理科系離れになってしまっている若者を呼び戻すために全国の高専生を対象に毎年行われている『ロボットコンテスト』は，予想以上の効果を上げた．

これにヒントを得て，数学に関心のある生徒も，無い生徒も，またデキル生徒もデキナイ生徒も一緒に考えることの楽しさ，工夫の素晴らしさ，物をつくることの喜びを実感できる“**数学発想物づくりコンテスト**”を行ってみた．毎年，夏休みの約1週間を使い，東海大学では，付属中･高校全20校の生徒32名を対象に学園オリンピックと称する大会を，嬬恋研修センターで行っている．その1週間のなかの2日間を利用してこのコンテストを試みたが，生徒の理数系離れのなかで苦闘している全国の数学の先生方の一助になれば幸いと考え，その様子を本稿では紹介したい．



秋山仁
東海大学教育研究所

1. 大会の様子

どの生徒も当初，6泊7日の長丁場，数学漬けの日々に耐えられるかどうか，一様に心配そうであった．正直言うと，生徒だけでなく，この大会にかかわる十数人の先生達も同感であったように思う．この大会では，6題の物づくり課題が与えられたが，そのうちの3題は約1カ月前に予め生徒達に手渡してあり，十分に考える時間を与えておいた．残り3題は大会当日に発表した．課題は主に，中村義作教授と筆者が作成し，最初に各課題にまつわる数学的背景などについて各問30分ずつの解説を行った．まず，生徒達を4，5人ずつの班に分け，カッター，ボール紙，粘土，発泡スチロール，磁石，コンパスなどの物づくりのための道具も配布し，その後は班内で自由に討論や実験を行わせた．各班には，中1生もいれば高3生もいるという具合に，学年の偏りは意図的に避けた．また，作品の出来の良し悪しを最終的に評価するため，班外の人との情報交換は禁止した．どの班も6題に挑戦するのだが，班ごとに作戦会議を開き，初めから何題かを放棄し，いいものができそうな課題だけに絞って挑戦している班もあれば，6題すべてにオールラウンドに力を注いでいる班もあった．彼らの取り組みの熱心さは先生方の予想を遥かに超えるものであり，徹夜組が続出し，不眠不休の体力勝負の戦いとなってしまった．先生方は各部屋を回り，生徒達が睡眠不足で健康を損ねることを懸念し，「早く寝ろ」「早く寝ろ」と言って歩く始末だった．

2. 出題意図

6題の問題は何らかの意味でどれも未解決問題であった．その方が，確立された解法が未知なるがゆえ，試行錯誤の余地があり，挑戦しがいがあると考えたからである．また，採点に出来得る限り公平性を持たせるため，答の良し悪しを容易に比較できる問題を選んだ．更に，身近なものの観察や物理的実験等から真実へのアプローチが可能そうな問題を選んだ．このコンテストの主旨は生徒達の手先の器用さや技術力を問うことがメインではないので，それらの力だけでなく，数学的発想や工夫，論理構築力及び体系的思考力をどうしても必要とする問題を優先させた．

3. 採点方法

採点は，オリンピックの体操競技のそれにならった．すなわち，中学，高校，大学の先生から構成される審査員15名の前で，各班の担当の生徒がその作品を提示すると同時に，それをつくるためのアイディアやそれを思いつくに至った動機，作成のために用いた定理や公式，計算法，更には，その作品のセールスポイントも合わせて発表させた．審査員から鋭い質問が次々と発表者に浴びせられたが，それにいかに的確に答えるのかも評価の対象とした．各作品の発表終了後，15人の審査員が生徒に向かって，一斉に1点から5点までの点数札を挙げ，あらかじめ用意しておいた得点表に次々と合計点を記入していった．1回ごとの得点を生徒達は固唾を飲んで見守り，抜きつ抜かれつのシーソーゲームが展開され，大いに盛り上がった．

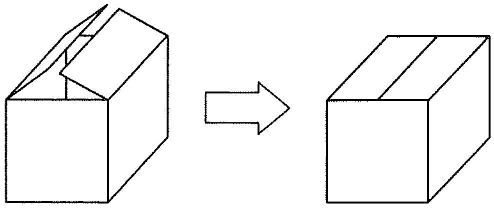
4. 6題の課題と幾つかの優れた作品例

生徒達が持てる力を振り絞ってつくりあげた作品やアイディアをすべて実況中継的に記述したいのだが，紙面の都合上，ここでは各問いについて優れた作品やアイディアだけに絞って紹介することをお許し願いたい．

［1］ ラッピング問題

(問題)

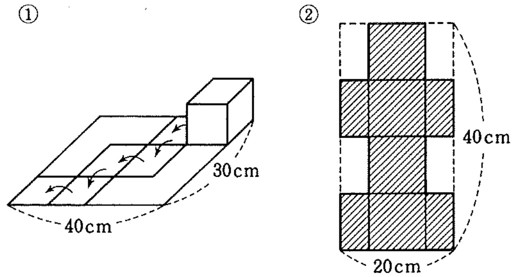
1辺の長さ10 cmの立方体の箱を1枚の長方形の形をしたラッピング用紙で立方体の表面を包むことを考える．つまり，立方体のどの部分もラッピング用紙に覆われるようにしなければならない．尚，立方体を覆ったときのラッピング用紙の境界について厳密に考えることにすると閉集合や開集合といった数学的に面倒な議論になり，中高生のレベルを超えるので，ここでは考慮しないことにする(すなわち，図Aのように紙の辺と辺が接していればOKとする)．更に，長方形の紙にハサミで切り込みを入れてはいけない．こういう条件のもとで，箱を包み込むときに，無駄を少なくするため(長方形の形をした)ラッピング用紙の面積をできるだけ小さくしたい．なるべく小さな面積をもつ長方形の用紙の縦，横の長さと，その長方形で具体的にどのように包めばよいかを調べよ．



図A

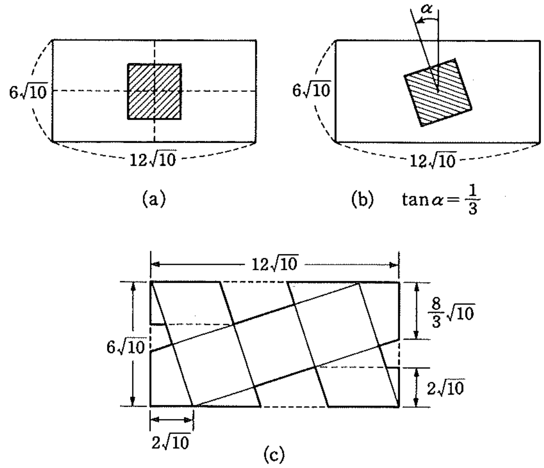
(解説)

図Bに示す用紙は①が面積1200 cm^2，②が面積800 cm^2である．どちらも箱を包めるので②の方が①よりよいことになる．



図B

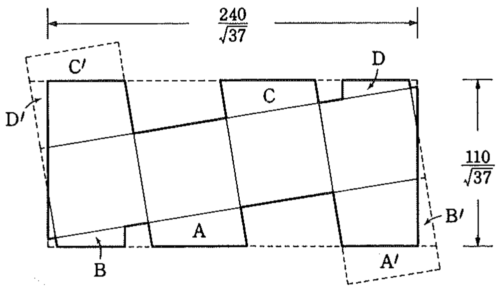
まず，最初にいくつかの班が提示した720 cm^2の包み方を説明しよう．その用紙は図C(a)のような，縦$6\sqrt{10}$ cm，横$12\sqrt{10}$ cmの長方形である．包み方は，まず最初に箱の底面の中心と長方形の紙の中心が一致するように箱を紙の上に置き，箱を中心に対してαだけ傾ける(図C(b))．このときαという角は$\tan\alpha=\frac{1}{3}$を満たす角度とする．あとは図C(c)のようにして箱を包めばよい．



図C

助手の川北真由美さんは，箱を紙に対して斜めに置けばよいということを知っていた．「どうしてそんなことを知っていたのか？」と尋ねたところ，昔，デパートでアルバイトをしていた時に習ったとのことだった．デパートの売場で店員さんが最初に習うことは包装の仕方だそうだ．包み紙の上に箱をどのように置けば，全体がきれいに包めるか，かつ，どの位小さな紙で包めるかの判定法などを習うようである．コツは“紙の中心と箱の中心を合わせ，紙に対して箱を少し斜めに置くこと”だということは，その世界ではいわば常識なのだそうだ．証明できるか否かは別として，デパートの店員さん達は経験から真実を突いているわけである．

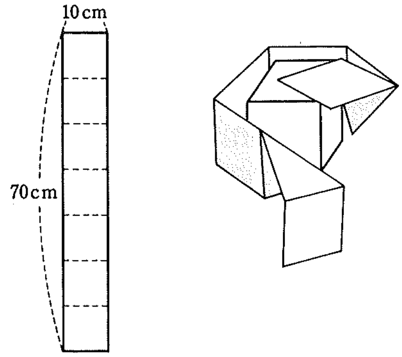
高3の女子生徒は前述の解より，より巧妙なものを提示してくれた．図Dのように，縦 $\frac{110}{\sqrt{37}}$ cm，横 $\frac{240}{\sqrt{37}}$ cm の長方形の紙で包むことができ，その面積は $\frac{26400}{37}=713.513\ \mathrm{cm}^2$ というものである．彼女はこの解に辿り着くに至った論理的展開や計算方法をキチッと発表した．



図D

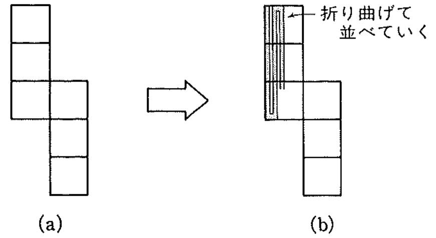
審査員一同，この発表には感動した．その後，筆者はこの問題を更に研究し，現在のところ知る，最良の解は面積約 705.88 cm² であるが，これが最良であることの証明はまだできていない．

ところで，珍迷案もたくさん披露された．そのうちの2つを紹介する．
高2の男子生徒が，$10\times7=700\ \mathrm{cm}^2$ で，図Eのような包み方を提示したが，これは包装紙の裏面が表に出てしまい，常識的でないという理由で反則になったが，珍アイディア賞が贈られた．



図E

中3の女子生徒達からは面積を 600 cm² にいくらでも近づけられるのではないかという驚くべき予想が出された．その包み方とは，簡単に言ってしまうと糸のように細長いテープ（これは確かに，長方形である）で立方体の箱の表面を覆い尽くしてしまおうというやり方である．例えば，図F(a)のような展開図を考えて，その展開図に細長いテープ（これは確かに長方形には違いない）を図F(b)のように貼っていくというやり方である．折り曲がるところでテープがちょっと重なるところがでてくる．その重なりの部分の面積が，いくらでも0に近づけられるのではないかというのが彼女達の予想だ．すなわち，テープの面積は立方体の表面積 600 cm² にいくらでも近づけることができるという予想である．ただ，この包み方をデパートで実用するのは無理である．また，残念ながら彼女達は，テープが折り曲がる箇所での重なる面積がいくらでも0に近づけられるという証明は不成功に終わったようである．筆者は，この発表を聞いて，“掛谷の針の問題”に対するベシコビッチの解答を想起した．ひょっとすると，彼女達は天才少女かも．



図F

［2］ いろいろな多面体の制作

(問題)

オイラーの多面体定理によると，頂点の個数 V，稜（辺）の本数 E，面の枚数 F の間には，

$V-E+F=2$ …… (1)

が成り立つ．いま，どの頂点にも 3 枚の面が集まっている特殊な多面体を考え，三角形面の個数を f_3，四角形面の個数を f_4，五角形面の個数を f_5，……などで表すと，

$3V=3f_3+4f_4+5f_5+6f_6+\cdots\cdots$

$2E=3f_3+4f_4+5f_5+6f_6+\cdots\cdots$

が成り立つ．これを式(1)に代入すると，簡単な計算から，

$3\times f_3+2\times f_4+1\times f_5+0\times f_6$
$=12+1\times f_7+2\times f_8+3\times f_9+\cdots\cdots$ (☆)

となる．この式から，この特殊な多面体には，三角形から五角形までのどれかの多角形面が必ず含まれることが分かる．ここで，七角形以上の多角形面は 1 個も含まない多面体を考え，三角形から五角形までの面の個数を調べると，その組合せは僅か 19 通りである．これらの多面体が実在するかどうかを調べ，実在するならばその多面体を具体的に作れ．ただし，六角形面はなるべく使わないようにせよ．

(解説)

問題文の式（☆）より，七角形以上の多角形を面として 1 個も含まない多面体が全部で何個あるかは，次の不定方程式の非負整数解の組 $(f_3,\ f_4,\ f_5)$ を求めればよい．

$3\times f_3+2\times f_4+1\times f_5+0\times f_6=12$

これを解くと 19 通りの解 $(f_3,\ f_4,\ f_5)$ を得るが，その中のいくつかの解に対応する多面体は六角形面を 1 個以上使わないと作れない．そのような場合は，用いる六角形面の個数を第 4 成分として付加し，$(f_3,\ f_4,\ f_5 : f_6)$ として表すことにする．この場合，問題文に示したように第 4 成分が小さいほどよいものとして評価する．

出題者が予め用意しておいた解答は表 A に示す 19 通りだったが，一番多くの種類の多面体を制作した班は，合計 16 通りのものを作った．しかし，残念ながら表 A に示したものよりも良い（六角形面の少ない）ものは示されなかった．多面体を作る素材は班によってマチマチで，ボール紙，折り紙，粘土，竹ひごなどバラエティーに富んで，面白かった．また，出来上がった作品は結構美しくもあり，さながら美術品の展覧会風でもあった．また，表 A に示す f_6 は，もしかすると改良の余地があるかも知れない．

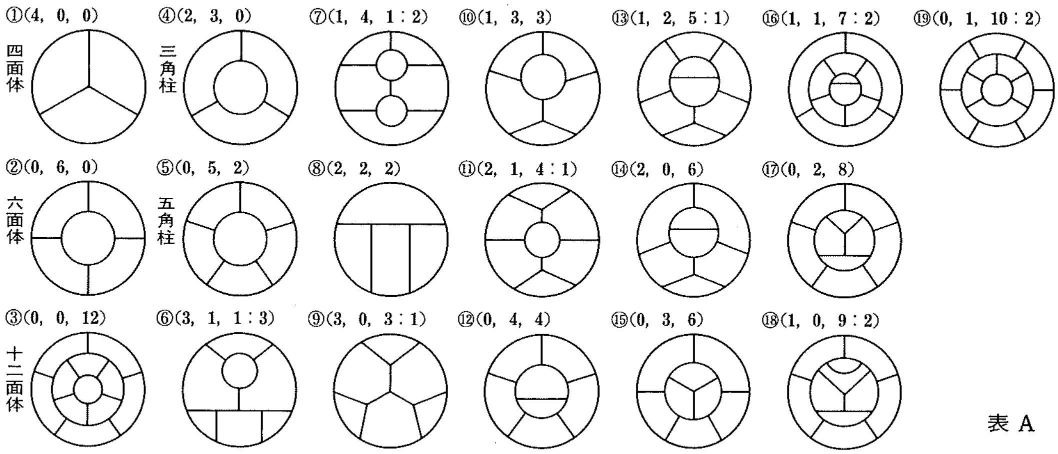


表 A

（東海大学教育研究所）

★問題 3 〜 6 については，次号（数研通信 28 号）に掲載いたします．
（編集部）