双曲線を表す一般形について

片岡 宏信（かたおか ひろのぶ）

1．はじめに

生徒が双曲線と最初に出会うのは，小学校において比例，反比例の関係を学ぶときであり，

$$y=\frac{a}{x} \tag{1}$$

の形の直角双曲線である．そのあとは，新課程と旧課程とで多少の違いはあるものの高等学校において，分数関数として平行移動をとり入れて，

$$y=\frac{a}{x-p}+q \tag{2}$$

の形の直角双曲線を学ぶ．次に，放物線とだ円と双曲線を２次曲線として統一して学ぶことになる．ここで学ぶ双曲線は，標準形として

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1 \tag{3}$$

という形をしている．しかし，この双曲線の標準形は反比例のグラフや，分数関数とは一見して，ずいぶん違った形のものに見える．ここではこれらの間の関係を示すとともに，式(1)(2)(3)を統一的に表すことのできる双曲線の式を示す．

2．双曲線の標準形

式(3)の双曲線を式(1)(2)の形の双曲線と結び付けるためには，式(3)の図形を，行列を使って回転させることを考えなければならない．

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$$

を，回転の行列

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

を使って，回転させると

$$\frac{(x\cos\theta+y\sin\theta)^2}{a^2}-\frac{(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2}{b^2}=\pm1 \tag{4}$$

となる．ここで $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$\theta=45°$ とすると，$\sin45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$(x+y)^2-(-x+y)^2=\pm4$$
$$4xy=\pm4$$
$$y=\pm\frac{1}{x}$$

ここで，やっと式(3)が反比例の関数と結びついた．

更に，式(4)を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると

$$\frac{\{(x-p)\cos\theta+(y-q)\sin\theta\}^2}{a^2}-\frac{\{(-x+p)\sin\theta+(y-q)\cos\theta\}^2}{b^2}=\pm1 \tag{5}$$

となる．これが最も一般的な形での，双曲線の方程式である．

ここで先と同様に $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$\theta=45°$ とすると，$\sin45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$\{(x-p)+(y-q)\}^2-\{(-x+p)+(y-q)\}^2=\pm4$$
$$2(x-p)(y-q)-2(-x+p)(y-q)=\pm4$$
$$(x-p)(y-q)=\pm1$$
$$y=\pm\frac{1}{x-p}+q$$

となる．これで分数関数が導かれた．

このように，双曲線の標準形を回転移動と平行移動を考えて一般化し，分数関数と関係づけることはもちろん可能であるが，ずいぶんと複雑な感じがする．

3．双曲線の一般形

ここでは，双曲線の標準形式(3)を一般化した式(5)をもっと単純にした，別の一般的な形の双曲線の式を示したい．

その前に，まず２次曲線についての定理をあげておく．

『定理：2次曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ は，$b^2-4ac>0$ ならば双曲線，
$b^2-4ac=0$ ならば放物線，
$b^2-4ac<0$ ならばだ円　である.』
この定理を使って次の定理を証明する.

定理：

$$(ax+by+c)(dx+ey+f)=k \tag{6}$$

k は $k\neq 0$ の定数　$(ae\neq bd)$
で表されるグラフは

$$(ax+by+c)(dx+ey+f)=0 \tag{7}$$

を，漸近線とする双曲線である.

(証明)

式(6)を展開して

$$adx^2+bey^2+(ae+bd)xy$$
$$+(cd+af)x+(bf+ec)y+cf-k=0$$

ここで，先の定理を使って，$ae\neq bd$ であるから，

$$(ae+bd)^2-4abed=(ae-bd)^2>0$$

したがって，式(6)は双曲線である.

次に，式(7)が漸近線になっていることを示す.
この式は2直線

$$ax+by+c=0 \tag{8}$$
$$dx+ey+f=0 \tag{9}$$

を表している．よって，式(8)(9)が漸近線になっていることを示せばよい.

式(6)(8)(9)を，x 軸方向に $\dfrac{bf-ce}{bd-ae}$

y 軸方向に $\dfrac{cd-af}{bd-ae}$

だけ，平行移動すると

$$(ax+by)(dx+ey)=k \tag{10}$$
$$ax+by=0 \tag{11}$$
$$dx+ey=0 \tag{12}$$

となる.

式(10)を y について解いて

$$y_{10}=-\frac{(ae+bd)x}{2be}\pm\frac{\sqrt{(ae-bd)^2x^2+4bek}}{2be}$$

式(11)を y について解いて

$$y_{11}=-\frac{ax}{b}$$

式(12)を y について解いて

$$y_{12}=-\frac{dx}{e}$$

十分大きな $|x|$ のところでは，

$$y_{10}\fallingdotseq\frac{1}{2be}\left\{-(ae+bd)x\pm|(ae-bd)x|\pm\frac{2bek}{|(ae-bd)x|}\right\}$$

となるから，$ae>bd$ のとき，$x\to+\infty$ を考えると，y_{10} の＋の方については

$$y_{10}-y_{12}\fallingdotseq\frac{-(ae+bd)x+(ae-bd)x}{2be}+\frac{2bek/(ae-bd)x+2aex}{2be}$$
$$=\frac{k}{(ae-bd)x}$$
$$\to 0\quad(x\to+\infty)$$

したがって，直線(12)は双曲線(10)の漸近線になっている.

y_{10} の－の方についても，同様にして

$$y_{10}-y_{11}\to 0\quad(x\to+\infty)$$

が示せる．したがって，直線(11)も双曲線(10)の漸近線である.

また $x\to-\infty$ や $ae<bd$ の場合についても同様に考えて，直線(11)(12)が双曲線(10)の漸近線であることが示せる.

式(10)(11)(12)は，式(6)(8)(9)を平行移動したものであるので，式(10)(11)(12)の間の関係はそのまま式(6)(8)(9)の関係でもある．したがって，上の定理が成り立つ.

(証明了)

逆に，式(5)を因数分解して

$$\left\{\frac{(x-p)\cos\theta+(y-q)\sin\theta}{a}-\frac{(-x+p)\sin\theta+(y-q)\cos\theta}{b}\right\}$$
$$\times\left\{\frac{(x-p)\cos\theta+(y-q)\sin\theta}{a}+\frac{(-x+p)\sin\theta+(y-q)\cos\theta}{b}\right\}=\pm1$$

と変形できるので，双曲線は常に式(6)の形をしていることも示された.

この定理は結局，漸近線によって双曲線の式を指定することになっている．なお，$ae=bd$ のときには，漸近線になるべき2直線が平行になるので，双曲線にはなれない.

4．例

上の定理を使うと，すべての双曲線の式が漸近線によって明らかになる．

例 1）　$xy=1$

これは最も基本的な反比例のグラフ

$$y=\frac{1}{x}$$

である．漸近線は $xy=0$ より $x=0$（y 軸），$y=0$（x 軸）である．

例 2）　$(x-4)(y-5)=3$

$$y=\frac{3}{x-4}+5$$

の分数関数である．漸近線は，$(x-4)(y-5)=0$ より，$x=4$，$y=5$ である．

例 3）　$\left(\frac{x}{1}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{1}+\frac{y}{2}\right)=1$

という形にすると，双曲線の方程式の標準形

$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$

になる．漸近線は

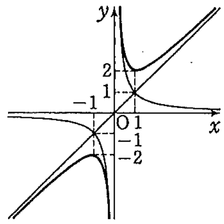
$$\left(\frac{x}{1}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{1}+\frac{y}{2}\right)=0$$

より $y=\pm 2x$

例 4）　$x(y-x)=1$

$$y=x+\frac{1}{x}$$

は $y=x$ と $x=0$ を漸近線とする双曲線である．この式が双曲線であるということは，上の定理がないとあまり自明なことではないだろう．



5．おわりに

式(6)によって指定される漸近線の頂点や，焦点の式は一般には複雑であって，実際にはあまり便利そうには見えない．しかし，我々は双曲線を漸近線によって理解する傾向が多分にあると考える．したがって，式(6)によって双曲線が表されるという知識は双曲線に慣れたり，すべての双曲線を統一的に理解するという意味では有効であろうと考える．

参考文献

1）　理解しやすい 代数・幾何（文英堂）
2）　数学公式 I（岩波全書）
3）　チャート式 解法と演習 代数・幾何（数研出版）
4）　チャート式 代数・幾何（数研出版）

（兵庫県立　姫路商業高等学校）