

2次元線形変換による軌道とその類型

ひのまさゆき
日野 雅之

1. はじめに

行列 A による漸化式 $x_{n+1} = Ax_n$ に基づき x_n を n の式で表す問題によく出会う. このように線形変換によって, 平面上の点が次々に移されていく道筋はしばしば線形変換の軌道と呼ばれ, 離散力学系の分野では重要な研究対象となっている^[1].

本稿の目的は

- 1) 2次元線形変換の軌道を類型別にまとめること, および
- 2) 軌道を具体例に基づき図示し可視化すること, にある.

軌道の形状とその類型に関し具体的に示している文献は数が少ないように思われる^[2]. したがって, 単純な内容ではあるがここに詳細にまとめておくことは, 高校数学教育の立場から意義が深いことといえる.

新しい高等学校学習指導要領^[3]において‘1次変換’が削除されたが, 線形変換の概念は高校数学においてきわめて重要である. 実際, 指導要領には‘複素数と複素数平面’が新たに加わり, そして行列の計算は残され, 関数や写像の概念は数学の最も重要な基礎の1つであることは当然である.

2. 線形変換の軌道

まず軌道の概念を導入する. 本稿では線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ はすべて2次元に限る. 線形写像 f は行列 A_f で表現され, $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し, $f(x) = A_f x$ である.

漸化式 $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定義される点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を線形写像 f の軌道 (orbit) と呼ぶ. また, $x = f(x)$ を満たす点 x は固定点 (Fixed point) と呼ばれ, 原点は任意の線形変換の固定点である.

例 $A_f = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ のとき, 放物線 $y = ax^2$

の上の点は f によって同じ放物線の上に移り, 図1のように平面上の点は放物線上を原点に向かって動いていく. また, x 軸および y 軸上の点もその軸に沿って原点に近づく. 図1のように点の軌道を表した図はしばしば相肖像 (Phase portrait) と呼ばれる.

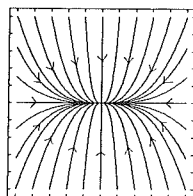


図1: 相肖像の例

行列の標準形に関する次の定理に基づき, 写像 f とその軌道を f の表現行列 A_f の型によって分類するのが便利である.

定理1 実 2×2 行列 A は, 次の3つの型の標準形に相似である.

$$\text{I. } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{II. } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{III. } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

($\lambda, \mu, \alpha, \beta$ は実数で, $\beta \neq 0$)

I型とII型は Jordan の標準形である. 証明および詳細に関しては線形代数の教科書を参照されたい^[4].
連続軌道 上に定義した離散的な軌道を連続的な場合に拡張する. そのため定理1における固有値を $\lambda > 0, \mu > 0$ の場合に制限する. 定理1によると, 任意の正則な行列 A_f とその標準形 B_f に対し, ある実行列 P が存在し $A_f = P^{-1} B_f P$ が成り立つから,

点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ の第 n 点は

$$x_n = A_f^n x_0 = P^{-1} B_f^n P x_0 \tag{1}$$

と表される.

ここで整数値 n を実数の範囲に拡張し, A_f^t ($t \in \mathbb{R}$) を

$$A_f^t \equiv P^{-1} B_f^t P \quad (2)$$

に従って, 標準形 B_f を用いて定義する. ここに, B_f^t は

$$B_f^t = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

において, $n \in \mathbb{Z}$ を実数の範囲に解析的に延長したものとして定義することにする. 具体的には, 標準形の3つの型に対して

$$\text{I. } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}^t \equiv \begin{pmatrix} \lambda^t & 0 \\ 0 & \nu^t \end{pmatrix}$$

$$\text{II. } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^t \equiv \begin{pmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix}$$

$$\text{III. } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^t \equiv r^t \begin{pmatrix} \cos t\omega & -\sin t\omega \\ \sin t\omega & \cos t\omega \end{pmatrix}$$

$$\left(r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \omega = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

である.

このような拡張によって, 実数 t は点が移動する‘時間’という概念をもち得て, したがって時刻 t における点は

$$\mathbf{x}(t) = A_f^t \mathbf{x}(0) \quad (4)$$

によって定義できることが示された. これにより軌道の微分的な量も定義でき, 次節において速度ベクトルを調べることにする.

3. 線形変換と速度場

軌道を視覚化するためにしばしば速度ベクトル場が用いられる. $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ に対する速度ベクトル $\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ はいまの場合

表1: 線形変換の標準形の分類

型	標準形の例		
I	I a. $\lambda < 1, \mu < 1$	I b. $\lambda < 1, \mu < 1$	I c. $\lambda > 1, \mu > 1$
	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
	I d. $\lambda > 1, \mu = 1$	I e. $\lambda < 1, \mu > 1$	
	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	
	I f. $\lambda = \mu < 1$	I g. $\lambda = \mu > 1$	
	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	
	II	II a. $\lambda < 1$	II b. $\lambda = 1$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	
III	III a. $r < 1$	III b. $r = 1$	III c. $r > 1$
$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} A_f^t \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \quad (5)$$

で与えられる。ここに時間微分 $\frac{d}{dt} A_f^t$ は標準形

$$B_f^t = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \text{ の微分} \\ \frac{d}{dt} B_f^t = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix} \quad (6)$$

を通じて

$$\frac{d}{dt} A_f^t = P^{-1} \left(\frac{d}{dt} B_f^t \right) P \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \quad (7)$$

によって定義できる。

I-IIIの各型に対する標準形を具体的に用いて計算すると、式(5)は簡単な微分方程式

$$\dot{x} = Vx \quad (8)$$

に帰着されることを容易に示すことができる。ここに V は写像 f にのみ依存する簡単な定数行列であり、I-IIIの各型に対して

$$PVP^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \ln\lambda & 0 \\ 0 & \ln\lambda \end{pmatrix} : \text{I} \\ \begin{pmatrix} \ln\lambda & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \ln\lambda \end{pmatrix} : \text{II} \\ \begin{pmatrix} \ln r & -\omega \\ \omega & \ln r \end{pmatrix} : \text{III} \end{cases} \quad (9)$$

で表される。ただし、 P は式(1)での基底変換行列である。

これによって、各点 x における速度ベクトル \dot{x} が求められたことになり、したがって速度ベクトル場が定義されたことになる。式(8)は、各点の速度がその点の位置ベクトルのみで表せることを示している、この式を用いると時刻に依存することなく速度が与えられるという点で、便利な式である。

4. 軌道の類型

前節までで、行列の標準形を用いることによって、線形変換が類型化できることがわかった。本節では典型的な標準形の行列を与え、具体的に速度場を图示して、各型の軌道を確認する。

線形変換の表現行列に対する典型的な例を表1にまとめた。表1にはほぼすべての標準形の例が与えられている。ただし、 λ と μ の入れ換えによって得られるものは除く。

表1の標準形の各例に対して、式(8)に基づき速度ベクトル場を計算し、結果を図2に示す。式(8)から判るように、 \dot{x} は x に比例するので、図2のグラフの縦あるいは横方向のスケールを拡大あるいは縮小しても、矢印の大きさを同じスケールで縮小あるいは拡大すれば全く同じ速度場の様子が得られるはずである。したがって、図の縦横各方向のスケールは任意にとつてある。

以下に図2の特徴的な点をいくつかまとめる。

I型 I a. (I c.) は曲線 $y = ax^3$ および x 軸、 y 軸を不動曲線 (invariant curve) とし、その軌道に沿って固定点である原点に近づく (原点から遠ざかる) 軌道の様子を示す。

I b. (I d.) は固有値の1つが1の場合で、各々 x 軸 (y 軸) に垂直な任意の直線を不動直線として、それに沿って x 軸に (y 軸から) 近づく (遠ざかる) 軌道の様子を示す。 x 軸 (y 軸) 上の任意の点が固定点である。

I e. は双曲線 $y = \frac{a}{x}$ および x 軸、 y 軸を不動曲線とし、左右遠方から原点方向に近づき、同時に上下方向に離散する軌道の様子を表す。その際、固定点である原点は鞍点 (saddle point) と呼ばれる。

I f. (I g.) は固有値が縮退しているときで、原点を通るすべての直線を不動直線として、それに沿って放射状に原点に近づく (原点から遠ざかる) 軌道を示している。

II型 II a. (II c.) は螺旋状に原点に近づく (原点から遠ざかる) 軌道を表しているが、実は螺旋ではなく、 x 軸が不動直線になっている。

II b. は x 軸に平行な軌道であり、 x 軸上の点はすべて固定点であり、 x 軸に平行な直線はすべて不動直線であることがわかる。

III型 III a. (III c.) は内向き (外向き) の対数螺旋軌道を示している。

III b. は原点の周りの回転による円軌道である。

5. 一般の線形変換による連続軌道

最後に、いくつかの一般的な線形変換を取り上げる。この場合、速度ベクトルを矢印で示すと図が幾分複雑になるため、式(2)および式(4)を用いて、連続軌道を陽に図示したものが図3である。時間 t とともに移動する方向は曲線上の矢印で示されている。

図3 a. は $A_f = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ の場合で、標準形は $B_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ したがって I 型である。原点が固定点で、2つの直線 $y=2x$ および $y=-\frac{1}{2}x$ が不動直線になっている。

図3 b. は $A_f = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ の場合で、標準形は $B_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ したがって I 型である。この場合、固定点である原点は鞍点になっている。2直線 $y=3x$ および $y=-x$ が不動直線である。

図3 c. は $A_f = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のときで、標準形として II 型の $B_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ をもつ。原点は固定点であり、原点から遠ざかっていく様子を示している。不動直線は $y=\frac{1}{2}x$ である。

図3 d. は $A_f = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ による軌道を表し、標準形は III 型の $B_f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ である。歪んだ対数螺旋線に沿って原点に近づく軌道を示している。

6. まとめ

以上をまとめると、本稿では

- 1) 2次元の線形変換の類型をその標準形によって分類した。
- 2) '時間' の概念を導入することによって軌道を連続化し、
- 3) そのことによって速度ベクトル場を定義し、速度ベクトルが位置ベクトルに比例することを示した。

4) そして、ほとんど全ての標準形に対して速度ベクトル場を図示し、

5) 更に、一般的ないくつかの線形変換に関して連続軌道を図示した。

速度ベクトル場が位置ベクトルに比例することを表す微分方程式(8)は、速度ベクトル場を図示しようとする際、極めて便利な式であることが、実際に計算してみてよくわかった。

本稿で扱った問題は、高校数学における2次元線形変換の特徴を理解するうえで有用な題材であるばかりでなく、高等学校学習指導要領^[3]におけるコンピュータを用いた数学の指導の良い材料を提供しているように思える。

本稿を更に発展させる方向として、1つは数値計算としての教材開発に本稿の内容を活かすこと、2つは非線形変換へと考察を深める、ということを現在考えている。

参考文献

- [1] D.Gulick, *ENCOUNTERS WITH CHAOS*, McGraw-Hill, New York, 1992;
P.G.Drazin, *Nonlinear systems*, Cambridge University Press, New York, 1992.
- [2] 小寺平治, 線形変換の固有値, 数学セミナー, 1982年6月号およびその中の参考文献を参照.
- [3] 高等学校学習指導要領解説 数学編, 平成元年12月, 文部省.
- [4] 例えば, 斎藤正彦, 線形代数入門, 東京大学出版会, 1966.

(東京都 穎明館高等学校)

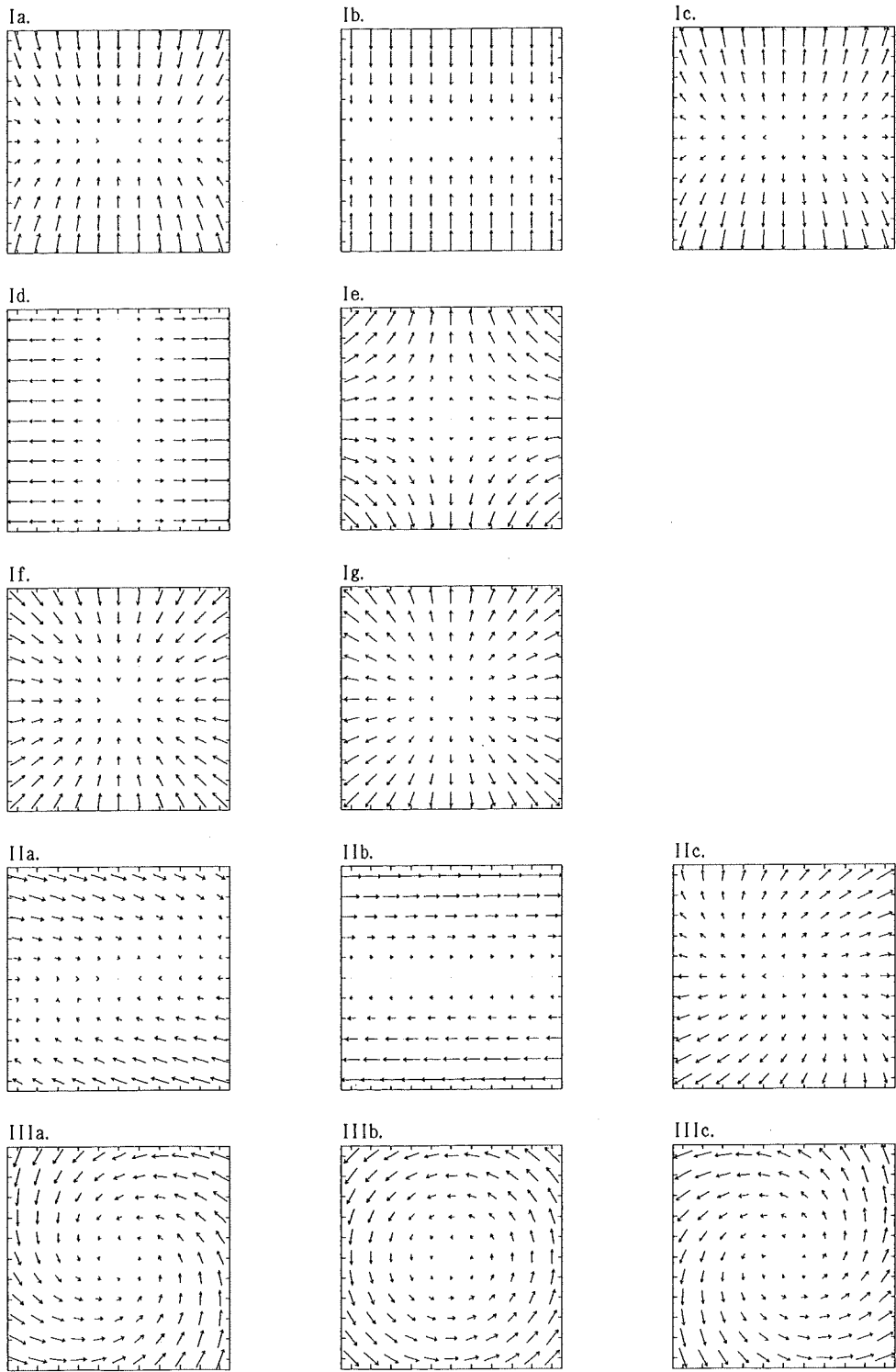


図2：線形変換の標準形による速度ベクトル場。各図の詳細は本文参照。

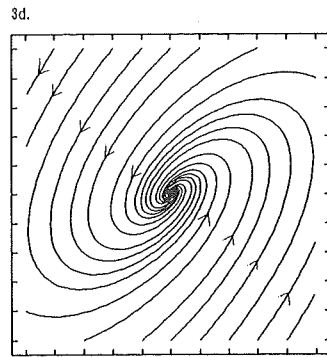
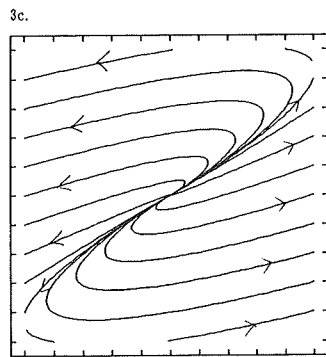
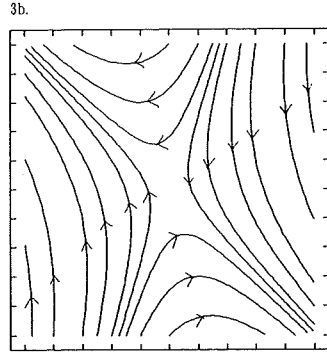
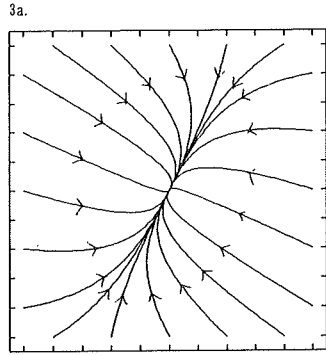


図 3 : 一般の行列による連続軌道の例, 行列の具体的な形については本文参照.