曲率を使って放物線の頂点を求める

—— 媒介変数表示 ——

石濱（いしはま） 文武（ふみたけ）

§1　はじめに

新課程の数学Cには「いろいろな曲線」があり，その中に「曲線の媒介変数表示」という項目があります．旧課程でも扱われていますが，コンピュータとの関連で，新課程では，曲線の媒介変数表示は，より積極的に扱われるものと思われます．

本稿では，x，y が t の2次式で表される場合について曲率を用いた考察を試みたいと思います．

§2　考え方

方程式 $\begin{cases} x=t^2+4t \\ y=2t^2+3t \end{cases}$　（t は媒介変数）

が放物線を表すことはいろいろな方法でわかりますが，この放物線の頂点の座標はどのようにしてみつければよいのでしょうか．t を消去して主軸変換を行う等の方法が考えられますが，かなりの手間がかかります（この曲線の場合，放物線の対称軸の方向角が30°，45°等のいわゆる基本角になっていません）．

そこで，曲率を利用できないかと考えてみます．

2次関数　$y=ax^2+bx+c$

の場合には，中学校以来，頂点の y 座標がこの関数の最大値または最小値になっていることを利用して頂点を求めてきました．しかし，これは座標軸に依存した求め方です．本例のように対称軸が座標軸に平行でない場合には利用できません．

そこで，放物線の頂点の座標軸に関係しない特徴付けが必要になります．

それが曲率です．

放物線の頂点は，曲線上で曲率の絶対値が最大になる点である

§3　曲率，曲率半径

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における曲率は

$$\rho=\frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}},\quad \text{曲率半径は}\quad r=\frac{1}{\rho}=\frac{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

で与えられます．

媒介変数表示 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ で与えられる場合は

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad y''=\frac{\dot{x}\,\ddot{y}-\ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

$$\left(\text{ただし，}\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \dot{y}=\frac{dy}{dt},\ \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\ \ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

を代入すると $r=\dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\,\ddot{y}-\ddot{x}\,\dot{y}}$ となります．

§4　計算

放物線 $\begin{cases} x=t^2+4t \\ y=2t^2+3t \end{cases}$　（t は媒介変数）

の頂点を上記の方針で求めてみましょう．

$\dot{x}=2t+4$，$\ddot{x}=2$，$\dot{y}=4t+3$，$\ddot{y}=4$ を§3の式に代入すると，曲率半径の絶対値は

$$|r|=\frac{1}{10}\{20(t+1)^2+5\}^{\frac{3}{2}}$$

となりますから，曲率の絶対値を最大にする点，すなわち曲率半径の絶対値を最小にする点に対応する t の値は

$t=-1$

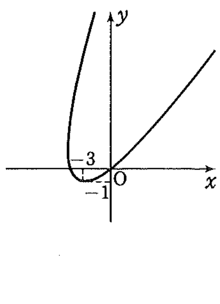
です．このとき，

$x=-3$，$y=-1$

ですから，結局，放物線の頂点の座標は

$(-3,\ -1)$

です．



§5　一般化

x，y が t の2次式で与えられる場合について，上記の結果を一般化します．

t を媒介変数として

方程式 $\begin{cases} x=at^2+bt+k \\ y=ct^2+dt+n \end{cases}$

（a，c のうち少なくとも一方は0でない）

は，

$ad-bc\neq 0$ のとき　放物線

$ad-bc=0$ のとき　半直線

を表します．

以下，$ad-bc\neq 0$ とします．

x，y が t の2次式で与えられる場合は

$\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}$ は定数

になりますから，

曲率半径の絶対値 $|r|$ は t の2次式で，

$$|r|=\frac{4(a^2+c^2)t^2+4(ab+cd)t+(b^2+d^2)}{2|ad-bc|}$$

となります．

したがって，放物線の頂点を与える t の値は

$$t_0=-\frac{ab+cd}{2(a^2+c^2)}$$

となります．

この頂点における放物線の法線の傾きを求めることにより，

放物線の対称軸（直線）の傾きは

$m=\dfrac{c}{a}$　（$a=0$ のときは，y 軸に平行）

となります．

対称軸の傾きに関するこの結果は簡明で有用であることに注目して欲しいと思います．

> 放物線 $\begin{cases} x=at^2+bt+k \\ y=ct^2+dt+n \end{cases}$
>
> （$ac\neq 0$，$ad-bc\neq 0$）
>
> の対称軸（直線）の傾き m は
>
> $m=\dfrac{c}{a}$
>
> である．

例えば，§4で挙げた実例

放物線 $\begin{cases} x=t^2+4t \\ y=2t^2+3t \end{cases}$

の対称軸（直線）は直線 $y=2x$ に平行です．

なお，微分法を用いずに，代数的に放物線の頂点を求める方法としては，

2次曲線の直径

を利用する方法があります．

（神奈川県立　湘南高等学校）