ある数列についての一考察

浅間　崇（あさま　たかし）

問題　次の数列の第 n 項 a_n を求めよ．

1，3，4，6，8，10，12，……

という問題を考えてみよう．これは関東地区で視聴できる地上波テレビのチャンネルを並べたもので，過去に2回程テストに出題したものである．まだ正解者は1人だけであるが，

≪解答1≫　表示の内容からだけではこの数列は特定できない．したがって，一般項は求められない．

問題の不備を突いた解答である．確かに1，2，3，4，5，…… という数列で第6項が6という保証はない．このような解答も予想されるので，次の**条件1**を追加することとする．

〔条件1〕　表示されている部分だけが正しく求まればよいこととする（結局……の部分はあってもなくても同じ？）．また，解は無数に存在するがその中の1つを答えればよい．

≪解答2≫

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=4,\ a_4=6,\ a_5=8, \\ a_6=10,\ a_7=12 \\ a_n=f(n)\ (n\geqq 8) \end{cases}$$

注．$f(n)$ の部分は何でもよい．

これでは問題にならない．ここまで極端でなくても

≪解答3≫

$$\begin{cases} a_n=2n-1 & (n\leqq 2) \\ a_n=2n-2 & (n\geqq 3) \end{cases}$$

これは正解にせざるを得ない．しかし，これは出題の意図に反するので，次のような**条件2**を付け加えることにする．

〔条件2〕　ただし，ただ1つの n についての式で表現すること．

解答3を参考に $f(n)=\begin{cases} 1 & (n=1,\ 2) \\ 0 & (n\geqq 3) \end{cases}$ という関数，例えば $f(n)=\left[\dfrac{3}{n+1}\right]$ を用いて次のような解答が考えられる．

≪解答4≫

$$a_n=2(n-1)+\left[\frac{3}{n+1}\right]=\left[2(n-1)+\frac{3}{n+1}\right]$$

$$=\left[\frac{2n^2+1}{n+1}\right]$$

ガウス記号を避けるのであれば，絶対値を用いて次のような解答も考えられる．

$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ とおけば $f(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$

となるので，更に $g(x)=\dfrac{f(2x-5)+1}{2}$ とすれば

$g(n)=\begin{cases} 0 & (n=1,\ 2) \\ 1 & (n\geqq 3) \end{cases}$ となり，これを利用して

≪解答5≫

$$a_n=2n-\frac{|2n-5|}{2(2n-5)}-\frac{3}{2}$$

もっともこれは次のようにすればもう少しスマートに解ける．

$a_n=p|n-2|+q|n-3|+rn+s$ とおいて解答3の結果を得るように各係数を定めればよい．

≪解答6≫

$$a_n=\frac{1}{2}(|n-3|-|n-2|+4n-3)$$

無論，計算を厭わなければ次のようにおいて7元方程式を解いても求められるが，

$$a_n=k_1n^6+k_2n^5+k_3n^4+k_4n^3+k_5n^2+k_6n+k_7$$

≪解答7≫

$$a_n=\frac{1}{720}(-5n^6+129n^5-1325n^4+6855n^3$$
$$-18470n^2+25056n-11520)$$

この辺を解答として予想していたのであるが……

ところが解答をしながら，このタイプの問題を簡

単に解答する方法をふと思い付いた．

$f_p(x)=\begin{cases}1 & (x=p)\\ 0 & (x\neq p)\end{cases}$ という関数を作ってやればすべて解決する．

≪解答 8≫

$a_n=f_1(n)+3f_2(n)+4f_3(n)+6f_4(n)+8f_5(n)$
$\quad+10f_6(n)+12f_7(n)$

では $f_p(x)$ の具体例はというと次のようなものがある．

$f_p(x)=\left[\dfrac{1}{|x-p|+1}\right]$ あるいは $\left[\dfrac{1}{(x-p)^2+1}\right]$

また，ガウス記号を避けるのであれば，定義域は整数となるが

$f_p(x)=\left|\,|x-p|-\dfrac{1}{2}\right|-\left(|x-p|-\dfrac{1}{2}\right)$ とすればよい．

注．$|f(x)|-f(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\geqq 0)\\ -2f(x)\ (>0) & (f(x)<0)\end{cases}$

あまり教育的とは言えないかも知れないが，少なくともテストでは正解にせざるを得ないのではなかろうか．したがって，このタイプの問題は練習としてはよいが，テストには出題できなくなってしまった．入試でもたまに見掛けるが，このような解答で正解にしてもらえるのだろうか？

（千葉県立　東葛飾高等学校）