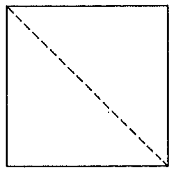
桜の花びらと三角関数

外処(とどころ)　直哉(なおや)

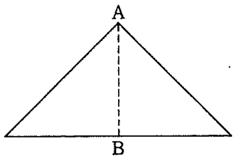
1．折り紙で桜の花びらを作ってみよう．

①



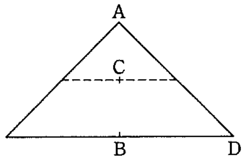
正方形を点線で２つに折って，

②



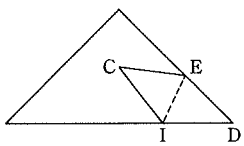
更に２つに折って，戻しておく．

③



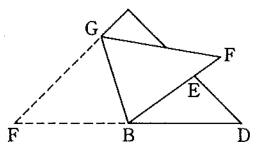
ＡとＢが重なるように折って戻す．

④



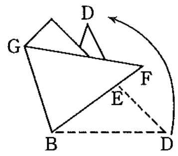
ＤとＣが重なるように折って戻す．

⑤



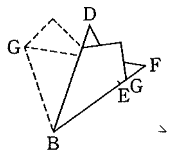
辺BFが点Ｅに重なるように折る．

⑥



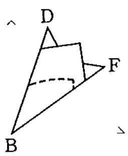
点Ｄが向こう側にいくように，直線BEで折る．

⑦



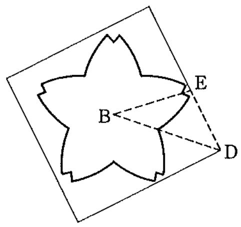
辺BGと辺BEが重なるように折る．

⑧



点線のように切って広げると，

⑨



きれいな桜の花びらが作れる．

　これは幼稚園に通っている娘が教わってきたものだが，１つ１つの花びらが円を５等分した形にかなり正確に作れます．これを見て妻が「数学的にどのくらい正確なのか計算して欲しい．」と言ってきて，それで考えたものである．

　三角関数の単元とも合わせて考えたら面白いと思い，組み立ててみました．

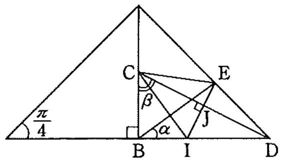
　もし花びらが正五角形を形づくるなら

$$\angle DBE = 36°$$

となるはずである．

2．計算してみよう．

まず，図⑤において，∠DBE が何度になるのか考えてみる．それは，この角に折り重なるように折ってから，花びらを切るので，この角が基準となっているからである．



△BCD で，BC=1 とすると

$BD=2,\ CD=\sqrt{5},\ DJ=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\angle BCD=\beta$ とすると

$\triangle BCD \backsim \triangle JID$ から $\angle DIJ=\beta$

よって $\angle DEJ=\dfrac{3}{4}\pi-\beta$

また，△BCD で

$\sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\qquad \cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ここで

$$\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\beta\right)$$

$$=\sin\frac{3}{4}\pi\cos\beta-\cos\frac{3}{4}\pi\sin\beta$$

$$=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

△DEJ において

$$\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\beta\right)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{DE}$$

ゆえに $DE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{3}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

△BDE において

$BE=x$ とすると

$$x^2=2^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)^2-2\cdot2\cdot\frac{5\sqrt{2}}{6}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{37}{18}=\frac{74}{36}$$

$x>0$ であるから $x=\dfrac{\sqrt{74}}{6}$

$\angle DBE=\alpha$ とすると

$$\frac{\frac{5\sqrt{2}}{6}}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{74}}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

ゆえに $\sin\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{74}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{5\sqrt{74}}{74}$$

$$\fallingdotseq 0.5812381$$

この式を満たす α は，普通の電卓では計算できないから，$\sin 36^\circ$ の値を求めてみよう．

三角関数の単元での利用を考えて，

$\theta=36^\circ$ のとき

$\sin3\theta=\sin2\theta$ であるから

(左辺)$=\sin3\theta=\sin(\theta+2\theta)$

$=\sin\theta(4\cos^2\theta-1)$

(右辺)$=\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

よって

$3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$

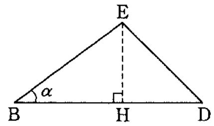
$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\qquad(\cos\theta>0)$

$$\sin36^\circ=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\fallingdotseq 0.5877852$$



これは BE=100mm のとき EH の誤差が，0.6mm であり，折り紙としたら十分な正確さであることがわかります．

ちなみに，パソコンを用いて，

$\sin\alpha=0.5812381$ を解くと，$\alpha=35.54^\circ$ と出てきて，角の誤差も 0.46° くらいの微小さです．

(群馬県立　吉井高等学校)