虚数解の視覚化

さかもと　しげる
坂本　茂

2次関数のグラフは xy 平面上の放物線であるが，ここで2次方程式の実数解は x 軸との交点として表される．もし虚数解もグラフ上に表示できたら，虚数は一層身近なものになってゆくだろう．

1．関数および写像のグラフ

実変数 x の実数値関数 $y=f(x)$ は定義域，値域とも実数の集合Rの部分集合であるから式を満たす点 $(x,\ y)$ を xy 平面上にとれる．この点の集合が関数 f のグラフである．したがって，方程式 $f(x)=0$ の解は x 軸 $(y=0)$ との交点として表示される．

方程式 $f(x)=0$ の虚数解を $y=f(x)$ の上に表示するには定義域を複素数の集合Cにとったグラフを考えなければならない．

関数に限らず一般に集合Aから集合Bへの写像を f とする．Aは f の定義域，Bの部分集合 $f(\mathrm{A})=\{f(x)\,|\,x\in\mathrm{A}\}$ を f の値域という．写像 f のグラフとはA，Bの直積集合 A×B の部分集合

$$G(f)=\{(x,\ f(x))\,|\,x\in\mathrm{A}\}$$

のことをいう．$f(\mathrm{A})\subset\mathrm{B}$，$G(f)\subset\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ また

$$(a,\ b)\in G(f)\iff b=f(a)$$

であり，f に関する性質は直積集合 A×B に関する性質に帰着する．

Aの部分集合 $f^{-1}(\mathrm{Y})=\{x\,|\,f(x)\in\mathrm{Y}\subset f(\mathrm{A})\}$ を集合 $\mathrm{Y}\subset\mathrm{B}$ の逆像という．要素 b だけの集合 $\{b\}$ の逆像 $f^{-1}(\{b\})$ が方程式 $f(x)=b$ の解の集合である．解の集合を求めることが方程式を解くことである．

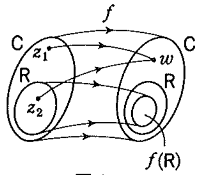

図1

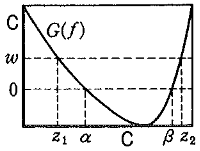

図2

実変数の実係数2次関数は値域が $f(\mathrm{R})\subset\mathrm{R}$ である．2次方程式は必ず2つの複素数解をもつから2次方程式 $f(z)=w$ の複素数解 z_1，z_2 が存在する．すなわち $f(\mathrm{C})=\mathrm{C}$ である（図1）．複素数の集合Cを線分で表すと直積集合 C×C は矩形で示されグラフ $G(f)$ は図2のようになる．図は**集合関係の図**であるが f の性質からグラフは放物線のように描かざるを得なくなる．

実数Rは直線に，複素数Cは複素数平面 R^2 に表すことで数と点が1－1対応し明確に図示される．定義域C，値域Cの複素関数のグラフ G は直積集合 C×C すなわち R^4 の図形として示される．これを R^3 で示すのは不可能であり $G(f)$ に代わる R^3 以下の図形上に虚数解の視覚化を試みよう．

2．平面上での幾何学的表示

幾何学的表示といっても解の公式で求めた虚数解を複素 z 平面上にとっただけでは，実解を数直線 x 軸にとった程度の表示でしかない．

一般に複素変数 $z=x+ui$ の関数 $w=f(z)$ は $w=y+vi$ と書ける．ここで

実部：$y=\mathrm{Re}f(z)$，虚部：$v=\mathrm{Im}f(z)$

すなわち複素関数 $w=f(z)$ は2組の実関数

$$y=y(x,\ u),\quad v=v(x,\ u)$$

と同値なのである．したがって方程式 $f(z)=0$ の解は z 平面（xu 平面）上の2曲線

$$y(x,\ u)=0,\quad v(x,\ u)=0$$

の交点として図示されるわけであり，解は連立方程式の実解としてみられることを示している．

実係数の2次関数 $f(z)=az^2+bz+c$ では

$$\left.\begin{aligned} y(x,\ u)&=f(x)-au^2,\\ v(x,\ u)&=u(2ax+b)\end{aligned}\right.\qquad(a\neq0)$$

となるが，実数解だけを問題にするなら $u=0$ とすればよく $v=0$ であり xy 平面上で $y=f(x)$ と x 軸との交点が実解である．

さて，ここで次のようにおくとみやすくなる．

$$D=\frac{b^2-4ac}{4a^2},\quad p=-\frac{b}{2a},\quad q=\sqrt{|D|}$$

$4D$ あるいは $4a^2D$ を f の判別式という．

$$y=a\{(x-p)^2-u^2-D\},\quad v=2au(x-p)$$

と書け，2次方程式 $f(z)=0$ の解は直角双曲線

$$(x-p)^2-u^2=D$$

と直線（x 軸）$u=0$ または直線 $x=p$ との交点として表される．これは双曲線とその主軸との交点であるから双曲線の頂点であり，$D\geqq 0$ のとき交点 $(p\pm q,\ 0)$，$D<0$ のとき交点 $(0,\ p\pm q)$ となる．**連立方程式の実数解として**（解の公式なしで）複素数解が得られ，同時に z 平面上に複素数解が図示されたわけである．

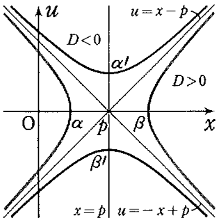

図３　実係数の場合の解

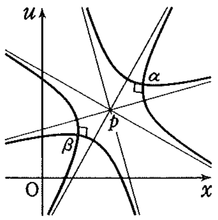

図４　複素係数の場合の解

３．複素係数の２次関数

複素係数 $a=a_1+a_2i$，$b=b_1+b_2i$，$c=c_1+c_2i$ の２次関数 $f(z)$ では実係数２次関数 $f_1(z)=a_1z^2+b_1z+c_1$，$f_2(z)=a_2z^2+b_2z+c_2$ とおき $f(z)=az^2+bz+c$ の実部，虚部は次のようになる．

$(a\neq 0)$　$y=y(x,\ u)=f_1(x)-u(2a_2x+a_1u+b_2)$

$v=v(x,\ u)=f_2(x)+u(2a_1x-a_2u+b_1)$

２曲線 $y(x,\ u)=0$，$v(x,\ u)=0$ はそれぞれ

$$4c_1|a|^2+a_1(b_2{}^2-b_1{}^2)-2a_2b_1b_2=0$$

$$4c_2|a|^2-a_2(b_2{}^2-b_1{}^2)-2a_1b_1b_2=0$$

のとき直交２直線で，それ以外のときは x，u の２次の係数より直角双曲線である．

主軸の方程式は曲線の式を x，u で偏微分すればよいから，$y(x,\ u)=0$ の主軸は

$$y_x=2a_1x-2a_2u+b_1=0$$

$$y_u=-2a_1u-2a_2x-b_2=0$$

$v(x,\ u)=0$ の主軸は

$$v_x=2a_2x+2a_1u+b_2=0$$

$$v_u=-2a_2u+2a_1x+b_1=0$$

である．したがって，次式が成り立っている．

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial u},\qquad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

これは一般の複素関数が（複素）微分可能なら成り立ち C-R 式 (Cauchy-Riemann) と呼ばれている．

上のことから２双曲線の中心は一致し

$$\left(-\frac{a_1b_1+a_2b_2}{2|a|^2},\quad -\frac{a_1b_2-a_2b_1}{2|a|^2}\right)$$

複素数 $p=-b/2a$ であり，２双曲線の主軸は他方の漸近線でもある．よって，２双曲線は共通の中心に対して点対称である**２点で必ず交わる**が，両曲線がともに２直線となるときは４直線は１点で交わり重解となる．なお，複素微分 $f'(p)=0$ である．

一般に $w=f(z)$ を表すのに R^4 を必要とするが定義域 z 平面，値域 w 平面を別々にとり，f あるいは $f^{-1}(w)=x(y,\ v)+iu(y,\ v)$ による図形がどのように移るか考えることができる．

w 平面上の格子線 $y=y_1$，$v=v_1$ は z 平面上で $y(x,\ u)=y_1$，$v(x,\ u)=v_1$ に移るが，２次関数の場合それぞれ直角双曲線である．

z 平面上で x 軸と平行線 $u=u_1$ は w 平面上では $y=y(x,\ u_1)$，$v=v(x,\ u_1)$ に移る．これは $y=m_1x_2{}^2+n_1x+k_1$，$v=m_2x^2+n_2x+k_2$ の形で x を消去し２次の項は $(m_2y-m_1v)^2$ となるから放物線 $u(y,\ v)=u_1$ である．y 軸と平行線 $x=x_1$ は $y=y(x_1,\ u)$，$v=v(x_1,\ u)$ に移るが，同様に u を消去して放物線 $x(y,\ v)=x_1$ となる．

また C-R 式より $\partial u/\partial x$ の積も $\partial v/\partial y$ の積も -1　よって，２組の双曲線群と２組の放物線群

双曲線群：$y(x,\ u)=y_1$，$v(x,\ u)=v_1$

放物線群：$x(y,\ v)=x_1$，$u(y,\ v)=u_1$

はそれぞれ z 平面，w 平面上の**任意の点で直交**する．

例えば，実係数の２次方程式で z 平面上の格子線

$$x=p\pm x_1,\quad u=\pm u_1$$

の像は w 平面上 y 軸を軸とする放物線でそれぞれ

$$y=-v^2/4ax_1{}^2-a(D-x_1{}^2)$$

$$y=v^2/4au_1{}^2-a(D+u_1{}^2)$$

である．ただし，$x=p$，$u=0$ の像は y 軸上 $-aD$ を境とする左右の半直線である．

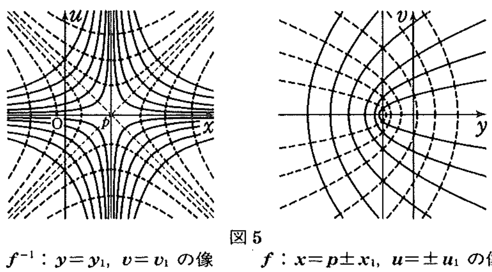

図５

f^{-1}：$y=y_1$，$v=v_1$ の像　　f：$x=p\pm x_1$，$u=\pm u_1$ の像

4．空間内での幾何学的表示

空間 R^3 の図形に複素数解の表示を考える．まず点 $(x,\ u,\ y)$ を 3 次元空間 R^3 にとることができる．

$$y=y(x,\ u)=\mathrm{Re}f(z)$$

であるから $w=f(z)$ の**実部のグラフ**である．方程式 $f(z)=0$ の解は $y=v=0$ を満たせばよいのだから，3 次元 xuy 空間の 2 曲面

曲面：$y=y(x,\ u)$，柱面：$v(x,\ u)=0$

の交線が，xu 平面 $(y=0)$ と交わった点として表示される．実係数 2 次関数 $f(z)=az^2+bz+c$ において実部 $y=y(x,\ u)$ のグラフの式は

$$y=f(x)-au^2=a\{(x-p)^2-u^2-D)\}$$

であるから，双曲的放物面と呼ばれる曲面である．xu 平面に平行な面で切ると直角双曲線，yx 平面または yu 平面に平行な面で切れば放物線となる．

$f(z)=0$ の解は $v=2au(x-p)=0$ より z 平面 $(y=0)$ 上の 2 直線 $u=0$ または $x=p$ と双曲的放物面 $y=\mathrm{Re}f(z)$ と交わる点で示される．双曲的放物面と z 平面との交わりは第 2 節の双曲線にほかならない．

この曲面 $y=y(x,\ u)$ には鞍点 $(p,\ 0,\ -aD)$ があり，鞍点（峠）での接平面と曲面との交わりは直交 2 直線である．$f(z)=0$ の解は $D=0$ のとき重解 $z=p$，$D<0$ のとき曲面は z 平面上で $x=p$ と交わり虚数解 $z=p\pm qi$，$D>0$ のとき曲面は x 軸と交わり実解 $z=p\pm q$ となる．

次に，点 $(x,\ u,\ v)$ を空間 R^3 にとって $f(z)$ の虚部 $v=\mathrm{Im}f(z)$ のグラフを考えることができる．

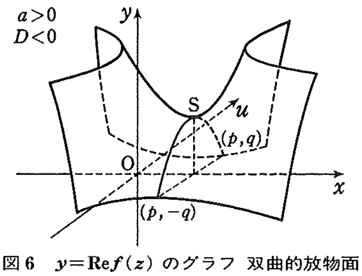

図 6　$y=\mathrm{Re}f(z)$ のグラフ 双曲的放物面

$f(z)=0$ の解は 3 次元 xuv 空間で

曲面：$v=v(x,\ u)$，柱面：$y(x,\ u)=0$

の交線が z 平面 $(v=0)$ と交わる点として示される．実係数 2 次関数の場合，曲面 $v=\mathrm{Im}f(z)$ は

$$v=v(x,\ u)=2au(x-p)$$

であり，鞍点 $(p,\ 0,\ 0)$ をもち，z 平面に平行な平面による切り口は直角双曲線である．また，xv 平面あるいは uv 平面に平行な平面による切り口は直線となっている．曲面 $v=\mathrm{Im}f(z)$ は z 平面で 2 直線 $u=0$，$x=p$ と必ず交わり，$y(x,\ u)=0$ は双曲柱面である．$f(z)=0$ の解は z 平面上で 2 直線と双曲線の交点で示されるが，解の様子を調べるのに v 軸は役に立っているわけではない．よって $v=\mathrm{Im}f(z)$ のグラフを R^3 に書くのは解の表示に適していない．

5．図示可能な 2 次関数のグラフ

$w=f(z)$ の定義域である z 平面上に $f(z)=0$ の解を表示することであったが，2 次関数のグラフを直接みることは出来なかった．しかし，**定義域や係数に条件を付ければ** 2 次関数のグラフを空間あるいは平面に描くことが可能なのである．

その最初の例が従来のように実係数の 2 次関数の定義域を実数に限った場合である．値域も実数となり $y=f(x)$ であるから R^2 平面にグラフを描くことが出来る．f のグラフは第 4 節の双曲的放物面を xy 平面で切ったものであり，軸が y 軸に平行な放物線 $y=a\{(x-p)^2-D\}$ である．

実係数の 2 次関数 $f(z)=az^2+bz+c$ で値域を実数にする $(v=0)$ には定義域を複素数のどんな部分集合にすればよいかを考えると

$$f(z)=f(x)-au^2+2au(x-p)i$$

であるから z 平面で $u=0$，$x=p$ に限ればよい．すなわち，定義域を集合 $\{t,\ p+ti\,|\,t\in\mathrm{R}\}\subset\mathrm{C}$ にすればよい．このとき 2 次関数のグラフは実数値関数 $y=f(z)$ として R^3 空間に点 $(x,\ u,\ y)$ の集合で描かれる．グラフは第 4 節の双曲的放物面を参照すればよく，**軸を同じくする 2 つの放物線**

$u=0$ 上で $y=f(x)=a\{(x-p)^2-D\}$

$x=p$ 上で $y=f(p)-au^2=-a(u^2+D)$

が頂点 $(p,\ 0,\ -aD)$ で 90° ねじれ向かい合ったものである．これは R^4 空間における実係数 2 次関数 $w=f(z)$ のグラフを（超）平面 $v=0$ で切った断面図（6 節）である．放物線と z 平面との交点が解を表している．

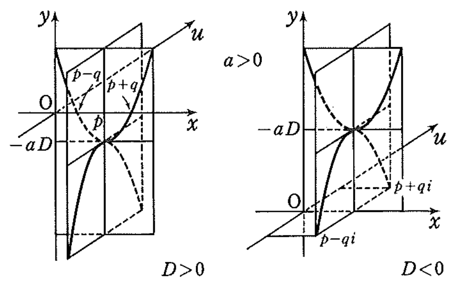

図7　定義域 $\{z\,|\,\mathrm{Im}f(z)=0\}$ におけるグラフ（超平面 $v=0$ による断面図）

この定義域 $\{z|\mathrm{Im}f(z)=0\}$ における2次関数 $y=f(z)$ の3次元グラフを用い，2次方程式の複素数解を黒板に図示したときは，高校生が目を見張ったものであった．定義域 $\{z|\mathrm{Re}f(z)=0\}$ における2次関数 $v=f(z)$ の3次元グラフは次節で述べる．

次に f をRから R^2 への写像としたものを挙げる．定義域が実数Rで複素係数の2次関数

$$f(x)=(a_1+a_2i)x^2+(b_1+b_2i)x+c_1+c_2i$$

これは2つの実2次関数に過ぎない．

$$y=y(x,\ 0)=a_1x^2+b_1x+c_1$$

$$v=v(x,\ 0)=a_2x^2+b_2x+c_2$$

この $w=f(x)$ のグラフは点 $(x,\ y,\ v)$ を R^3 空間にとって表され，2つの放物柱面 $y=y(x,\ 0)$, $v=v(x,\ 0)$ との交線であって放物線となる．方程式 $f(x)=0$ の解は x 軸 $(y=v=0)$ との交点であるから $a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$, $D\geqq 0$ のときに限られる．2放物柱面の交線であるグラフが放物線であることを示そう．まず，x^2 を消去して

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+a_2y-a_1v=a_2c_1-a_1c_2$$

となり x, y, v の1次式であるから平面曲線である．よって，放物柱面の平面による切り口を調べればよく，例えば $y=y(x,\ 0)$ を適当に回転させておき xy 平面で切ってみればよい．2次曲線であり x, y の2次の項をみれば十分．回転させた式は x に $\lambda x+\mu y+\nu v$ を代入し，更に $v=0$ とし xy 平面での切り口の式は2次の項が $(\lambda x+\mu y)^2$ であるから放物線である．

もう1つグラフが描ける例を示す．定義域を0も含めた純虚数 $\{z|\mathrm{Re}z=0\}$ とすると f はRから R^2 への写像となりグラフは R^3 空間に描かれる．実係数2次関数の場合に点 $(u,\ y,\ v)$ を R^3 にとると $y=-au^2+c$, $v=bu$ の v 軸に平行な放物柱面と y 軸を含む平面との交わりで，やはり放物線となる．

6．複素関数のグラフの断面図

ユークリッド空間 R^4 で A_0 を原点，$\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_4}$ を1次独立なベクトルとする標構 $(\mathrm{A}_0\,;\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3},\ \overrightarrow{a_4})$ をとれば任意の点Pは位置ベクトル

$$\vec{p}=\overrightarrow{a_0}+x\overrightarrow{a_1}+u\overrightarrow{a_2}+y\overrightarrow{a_3}+v\overrightarrow{a_4}$$

により表される．座標 $(x,\ u,\ y,\ v)$ を標構 $(\mathrm{A}_0\,;\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3},\ \overrightarrow{a_4})$ に関する斜交座標という．特に内積が $\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j}=\delta_{ij}$ である基本ベクトルをとると便利であり，この標構に関する座標を直交座標という．関数のグラフは斜交座標を用い空間内に描いてもよいが普通は直交座標が使われる．

実数値3変数関数 $v=f(x,\ u,\ y)$ のグラフは R^4 において4次元超曲面すなわち4次元空間にある3次元立体であるが，**複素関数のグラフは R^4 空間内の2次元曲面**なのである．

複素関数 $w=f(z)$ のグラフ $G(f)$ は R^4 空間の3次元立体と考えられる，それぞれ v 軸，y 軸方向に平行な2つの4次元超柱面

$$y=y(x,\ u),\ \ v=v(x,\ u)$$

の交わりである．したがって $G(f)$ は R^4 空間の2次元の曲面である．これを R^4 空間の超平面で切ると，すなわち**断面は3次元空間の空間曲線**となる．

座標 $(x,\ u,\ y,\ v)$ の4次元空間 R^4 の超平面は

$$ax+bu+cy+dv=e$$

と書ける．超平面は3つの座標が決まればすべての座標が決まるから3次元空間である．そこでこの超平面上の点 $(x,\ u,\ y,\ v)$ を座標 $(x,\ u,\ y)$ で表す $(d\neq 0)$ ことが出来るが，座標の基本である標構が違ったものになってしまう．最初の標構で超平面上のP点は $\vec{p}=\overrightarrow{a_0}+x\overrightarrow{e_1}+u\overrightarrow{e_2}+y\overrightarrow{e_3}+v\overrightarrow{e_4}$ と表されているが，座標 $(x,\ u,\ y)$ で点Pは

$$\vec{p}=\overrightarrow{a_0}'+x\overrightarrow{a_1}+u\overrightarrow{a_2}+y\overrightarrow{a_3}$$

$$\overrightarrow{a_0}'=\overrightarrow{a_0}+(e/d)\overrightarrow{e_4},\ \ \overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{e_1}+(a/d)\overrightarrow{e_4}$$

$$\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{e_2}+(b/d)\overrightarrow{e_4},\ \ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{e_3}+(c/d)\overrightarrow{e_4}$$

と表され基本になる標構は $(\mathrm{A}_0'\,;\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3})$ である．これは一般に斜交座標で直交座標ではない．

座標 $(x,\ u,\ y,\ 0)$ の表す点は座標超平面 $v=0$ への点Pの正射影である．したがって，超平面上の点Pを直交座標 $(x,\ u,\ y)$ のつもりで考えると歪んでいるわけである．座標超平面に平行な超平面 $v=v_1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ u,\ y,\ v_1)$ を座標 $(x,\ u,\ y)$ で表した場合の標構は $(\mathrm{A}_0'\,;\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ で直交座標であるから歪んでいない．原点 A_0' の位置ベクトルは $\overrightarrow{a_0}'=\overrightarrow{a_0}+v_1\overrightarrow{e_4}$ となる．

複素関数 $w=f(z)$ すなわち $y=y(x,\ u)$, $v=(x,\ u)$ の R^4 におけるグラフを超平面で切った断面の座標超平面 $v=0$ への正射影は

$$y=y(x,\ u),\ \ ax+bu+cy+dv(x,\ u)=e$$

で表され3次元空間の空間曲線である．2次元平面で切った f のグラフの断面は一般に可算個の点であり xu 平面で切った断面の点が方程式 $f(z)=0$ の

解である．

2 次関数の場合，第 5 節でみたように，超座標平面 $v=0$ すなわち $(x,\ u,\ y,\ 0)$ による断面図形は 2 つの放物線であった．超座標平面 $(x,\ u,\ 0,\ v)$ による断面は定義域 $\{z\,|\,\mathrm{Re}f(z)=0\}$ としたグラフであるが，双曲的放物面と双曲柱面との交線であって放物線ではない．鞍点 $(p,\ 0,\ 0)$ に対して点対称な 1 組のねじれた空間曲線で z 平面と 2 点で交わる．

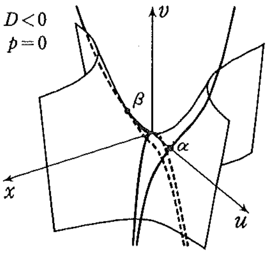

図 8　空間 $(x,\ u,\ 0,\ v)$ による断面曲線

超座標平面 $(x,\ 0,\ y,\ v)$ や $(0,\ u,\ y,\ v)$ による断面は空間内の 1 つの放物線である．$(x,\ 0,\ y,\ 0)$ による断面は普通 2 個以下の点であるが，実係数の場合は放物線である．

代数関数以外でも断面での解の表示は可能で

$$f(z)=e^z-1=e^x\cos u-1+ie^x\sin u$$

を例にとり，$(x,\ u,\ y,\ 0)$ による断面をみると

$$u=2n\pi \quad \text{のとき} \quad y=e^x-1,$$
$$u=(2n+1)\pi \quad \text{のとき} \quad y=-e^x-1$$

でこれは $y=\mathrm{Re}f(z)$ と平面 $u=n\pi$ との交線である．$f(z)=0$ の解はこの曲線と z 平面との交点で $x=0$，$u=2n\pi$ すなわち $z=2n\pi i$ である．したがって解は u 軸上に並んでいる．そこで $(0,\ u,\ y,\ 0)$ によるグラフの断面を考えるが，$y=\cos u-1$ ではない．実部 $y=\mathrm{Re}f(z)$ の断面であって，これと u 軸と交わった点の集合が $w=f(z)$ のグラフの断面図形である．なお C-R 式 $y_x=v_u=e^x\cos u$，$v_x=-y_u=e^x\sin u$ が成り立っている．

7．上半空間での幾何学的表示

方程式 $f(z)=0$ は方程式 $|f(z)|=0$ と同値である．したがって，方程式の解は R^3 空間の上半空間に描かれる $y=|f(z)|$ のグラフと z 平面との交点として図示される．

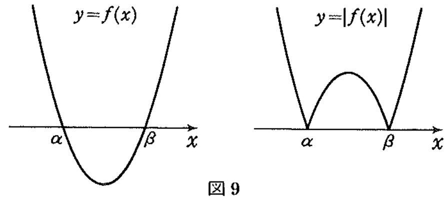

図 9

1 次関数 $f(z)=az+b$ で複素係数

$$z=x+ui,\quad a=a_1+a_2i,\quad b=b_1+b_2i$$

として曲面 $y=|f(z)|$ を調べると

$$y^2=(a_1x-a_2u+b_1)^2+(a_2x+a_1u+b_2)^2$$

であり放物錐面を表している．$az+b=0$ の解は z 平面上にある頂点である．z 平面に垂直な平面で切ると双曲線である．

次に，実係数 2 次関数 $f(z)=az^2+bz+c$ を考えよう．これは $f(z)=a\{(z-p)^2-D\}$ と書けた．$y=|f(z)|$ のグラフは $y=\mathrm{Re}f(z)$ のグラフと同じように $(p,\ 0,\ |aD|)$ で鞍点をもつ．鞍点が原点の上にくるまで z 面上を平行移動させ

$$y=|f(z+p)|=|a(z^2-D)|$$

とするとグラフが調べやすくなる．$z=x+ui$ より

$$y^2=a^2\{(x^2+u^2)^2+2D(u^2-x^2)+D^2\}$$

を得る．座標軸に平行な面による断面は x または u を定数とみて 4 次曲線で，座標軸に沿ってのみ放物線である．y を定数とみた等高線は閉曲線で**カッシニの橙形** (Cassini's oval) と呼ばれる曲線である．これは等高面上では $D>0$ のとき 2 点 $(\pm q,\ 0)$ から，$D<0$ のとき 2 点 $(0,\ \pm q)$ からの距離の積が y である点の軌跡である．特に，高さ $y=|aD|$ の鞍点を通る等高線は

$$(x^2+u^2)^2=2D(x^2-u^2)$$

となるが，これは**レムニスケート** (lemniscate) の式である．z 平面上で鞍点からの距離 r，x 軸となす角 θ である所の高さ y は $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおけて次のようになる．

$$y^2=a^2(r^4-2Dr^2\cos 2\theta+D^2)$$

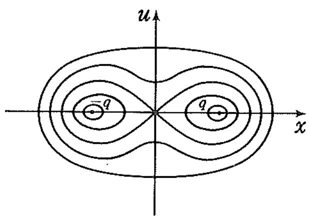

図 10　$y=|f(z)|$ の等高線

8．代数学の基本定理

複素数を係数とする n 次方程式は複素数解を必ず1つはもつ．したがって，因数定理を繰り返し用いることにより重解も含めると n 個の複素数解をもつ．この代数学の基本定理の証明にあたり，代数方程式 $f(z)=y(x,\ u)+iv(x,\ u)=0$ において z 平面上の曲線 $y(x,\ u)=0$, $v(x,\ u)=0$ が必ず交わることを示したのが，ガウスの最初の証明であるといわれ，後には幾つかの別証明も与えた．しかし，定理のどの証明もその名に反してすべて解析的であることは意外である．

代数学で普通に行われる証明の要点を第7節の上半空間による $y=|f(z)|$ の表示により説明できる．次のⅠ，Ⅱの2つが証明の基本となる．

Ⅰ　複素数 z の多項式 $f(z)$ において

$$|z|\to\infty \text{ のとき } |f(z)|\to\infty$$

このことは実数関数では明らかである．

Ⅱ　$\forall\alpha,\ f(\alpha)\neq 0 \Longrightarrow \forall\varepsilon>0\ ;\ \exists z_1$

$$:|z_1-\alpha|<\varepsilon,\ |f(z_1)|<|f(\alpha)|$$

Ⅱ′　$\forall\alpha \Longrightarrow \forall\varepsilon>0\ ;\ \exists z_2$

$$:|z_2-\alpha|<\varepsilon,\ |f(z_2)|>|f(\alpha)|$$

すなわち，$f(\alpha)\neq 0$ ならば任意の α のいくらでも近くに $|f(z_1)|<|f(\alpha)|$ となるような適当な z_1 がとれる．また，任意の α のいくらでも近くに $|f(z_2)|>|f(\alpha)|$ となるような z_2 がとれる．

Ⅱ，Ⅱ′ は実関数では成り立たない．α で実関数 $f(x)$ が極値をとるときは成り立たないからである．

関数 $y=|f(x)|$ のグラフの表す図形は曲面であり地形と考えてよい．基準面は z 平面であり，ここから測った高さが正数値 $y(>0)$ である．$f(z)$ が微分可能より $|f(z)|$ は連続で解以外では全微分可能である．したがって地面は滑らかである．

Ⅰにより，ある点例えば原点から十分遠ければ任意の高さよりも高くなっている．よって，**全体としては盆地**になっている．また，高い所に盆地すなわち極小値はない．なぜならⅡより盆地の底部より低いところがすぐ近くにあることになるからである．したがって，**盆地の底部はすべて高さ0**である．

高さ0である点の集合が面積（海）や線分をもつことはない．高さ0の点は方程式 $f(z)=0$ の解であり，解が無限にあることになるからである．なお，n 次代数方程式の解は n より多くはない．もし多いとすると因数定理より $f(z)$ は n 個より多い1次式の積になり n 次より高次の多項式となるから矛盾である．よって，盆地があるとすれば最底部は高さ0の1点で盆地というより排水口である．

ゆえに，地形に排水口（解）が**少なくとも1つある．**この地形に雨が降ると地形は平らでないから雨粒は低い方に流れ排水口の1つにたどり着く．すなわちⅠ，Ⅱの性質から上半空間における $y=|f(z)|$ の地形が理解され代数学の**基本定理が示された．**

この地形には山頂すなわち**極大値はない．**なぜならⅡ′から山頂があるとすると，すぐ近くにもっと高い所があるからである．方程式に2つ解があると，その中間付近に峠（鞍点）がある．xy 平面による地表の断面曲線は実関数 $y=|f(x)|$ のグラフであり，これは極値をもつことがあるが $y=|f(z)|$ のグラフと矛盾することではない．

例として，m を実数定数とする3次関数

$$f(z)=z^3-mz^2+z-m=(z-m)(z^2+1)$$

で $y=|f(z)|$ の地形を考えよう．$z=x+yi$ とおいて計算すると

$$y^2=\{(x-m)^2+u^2\}$$
$$\times\{x^2(x^2+2u^2+2)+(u^2-1)^2\}$$

となる．高さ y の等高線の方程式は x, u の6次式である．鞍点では z の微小変化で y や $f(z)$ は変化しないと考えられる．すなわち，（複素）微分が $f'(z)=3z^2-2mz+1=0$ となる．したがって，複素数 $z=(m\pm\sqrt{m^2-3})/3$ で鞍点となる．

$m=3$ のとき $f(z)=0$ の解は正三角形を作り鞍点は $(1,\ 0,\ 4)$ である．$m=2$ のときに鞍点は $(1/3,\ 0,\ 50/27)$, $(1,\ 0,\ 2)$ である．$m=1$ のとき鞍点は $(1/3,\ \pm\sqrt{2}/3,\ \sqrt{6}/9)$ である．

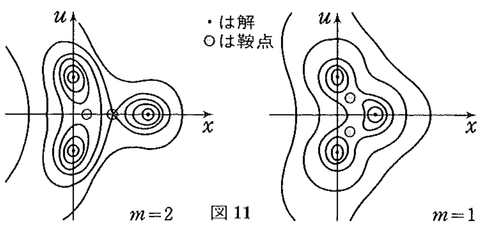

図11

$|(z-m)(z^2+1)|$ の等高線図

（東京都立　新宿高等学校）