ブール代数によるド・モルガンの法則の証明

田島(たじま)　宅二(たくじ)

1．その教材研究の動機（はじめに）

「数研通信」No.16 の p.16 で君島巖先生がその論文の冒頭で「高校 2 年生のときだった．夜中に目を覚ましたとき直角三角形が頭に浮かんだ．そして，直角を挟む 2 辺が斜辺より短いことを式に表すと，1 つの文字に関する 2 次方程式になるのでは，と思い，すぐ起きて計算を進めた．」と書かれてある．私は大変感激した．これは，まさに，君島先生の学生時代の「数学の詩」である．学問をするのに仮説を立てて立証（＝論証）するのは常道であるが君島先生の数学教師としてのあり方に心から敬意を表して，私の拙い研究をつづり，先輩諸氏の御批判をあおぎたい．

私は 1994 年 8 月，玉川大の科目等履修生として河口央商(ひろあき)教授の御指導を受けた．テーマは「ブール代数とブール関数の最小化」である．河口教授は「Logic and Algorithms By Robert R Korfhage」の一部を翻訳されてそのテキストにされた．

「ブール代数 Boolean Algebras」の学習は私にとっては初めてである．現在，わが国の大学において代数学を 10 単位履修してもブール代数に接するのは極めて希有のようであるが，ドイツのベルリン自由大学，コンピュータの先進国アメリカの大学等では，さかんにその学習（＝履修）が進められている模様である．その証左に，日本語に翻訳された参考文献を見ると，巻末に夥しい参考文献が紹介されている．わが国でも，コンピュータの実用化に対応して，ブール代数，ブール関数の単元が，高等学校の教育課程の中に出現する日も近いのではないかと思われる．ブール代数，ブール関数が，わが国の数学教育界に開国を迫っているのである．

ブール代数は，現代数学であるだけに学者によってその記号が独創的に使われ，記号の共通化（＝定着化）となっていないため，私たち初心者にとっては戸惑うに十分である．記号に慣れてくると，このブール代数に限りなく興味をおぼえるのである．

ブール代数に，まだまだ半可通な私が，ブール代数の集合的な式を操作しているうちにド・モルガンの法則の証明が可能にならないかと考えたのである．

その証明にたどりつくまでの記録（＝ノート）を書いておくことにする．

2．ブール代数の定義

「玉川大テキスト」によると，その定義は次のように書かれてある．

『ブール代数とは，集合 S と S 上で定義された次の性質をもつ 2 つの演算 #（加法として）と・（乗法として）からなる代数系 {S, #, ・} である．

〈性質 1〉

A1．$a \# b \in S$

M1．$a \cdot b \in S$

A2．$(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$

M2．$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

A3．$\forall a \in S$，$\exists! 0 \in S$　$a \# 0 = 0 \# a = a$

M3．$\forall a \in S$，$\exists! 1 \in S$　$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

A4．$\forall a \in S$，$\exists! \overline{a} \in S$　$a \# \overline{a} = \overline{a} \# a = 0$

A5．$a \# b = b \# a$

〈性質 2〉

$\forall a \in S$，$a \cdot a = a$　』　記号の意味は，

A（加法），M（乗法），$\forall$（すべての…に対して）， $\exists!$（たった 1 つ…存在して）

である．

次に，以上の定義から各々の集合代数は加法として△を，乗法として∩を用いることによってブール代数を形成する．ここで，加法として∪を採用して記号＋で表し，乗法として∩を採用して記号・で表すのである．これらの演算記号を用いてブール代数

を次のように定義するわけである．

『ブール代数とは，集合SとS上で定義された次の性質をもつ2つの演算＋(加法として)，・(乗法として)からなる代数系{S，＋，・}である．

A1．$a+b\in \mathrm{S}$
M1．$a\cdot b\in \mathrm{S}$

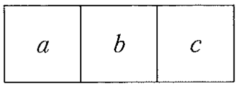
A2．$(a+b)+c=a+(b+c)$
M2．$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

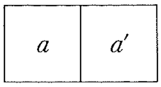
A3．$^{\forall}a\in \mathrm{S}$，$^{\exists 1}0\in \mathrm{S}$，$a+0=0+a=a$
M3．$^{\forall}a\in \mathrm{S}$，$^{\exists 1}1\in \mathrm{S}$，$a\cdot 1=1\cdot a=a$

A5．$a+b=b+a$
M5．$a\cdot b=b\cdot a$

D1．$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
D2．$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$
D3．$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$
D4．$(a\cdot b)+c=(a+c)\cdot(b+c)$ 』

記号Dは，分配である．
D3，D4は一見，「おやっ」と思わせるが，
D3は $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ に，
D4は $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ にそれぞれ対応しているからベン図で容易に理解できる．しかし，この a，b，c は重なりは一般に考えないようである．D3，D4では，





の図を念頭に入れておく．なお全体集合Uは1とし，空集合ϕは0とし，Aの補集合$\overline{A}$はa'とするのである．そうすると，$a+a'=1$，$a\cdot a'=0$ が成り立つ．また，$b+c=a'$，$a+c=b'$ も成立する．D3は

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺})&=a\cdot a+a\cdot c+b\cdot a+b\cdot c\\
&=a+a(b+c)+b\cdot c\\
&=a+a\cdot a'+b\cdot c\\
&=a+0+b\cdot c\\
&=a+b\cdot c=(\text{左辺})
\end{aligned}
$$

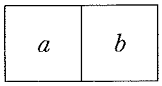
$a\cdot a$は，$A\cap A$ に対応するから，aである．
D4も，同様に証明できる．

3．4つの元からなるブール代数の演算表

4つの元からなるブール代数を構成し，3つの演算(#，＋，・)に対する演算表を作成することにする．4つの元は{0，a，b，1}である．

①$\alpha+\beta$

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1



②$\alpha\cdot\beta$

・	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

③$\alpha \# \beta$

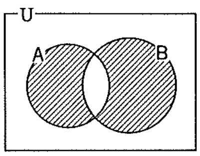
#	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	0	1	b
b	b	1	0	a
1	1	b	a	0

(例) $a\#a=a\cdot a'+a'\cdot a=a\cdot b+b\cdot a=a\cdot b+a\cdot b=a\cdot b=0$

(例) $a\#b=a\cdot b'+a'\cdot b=a\cdot a+b\cdot b=a+b=1$

(例) $a\#1=a\cdot 1'+a'\cdot 1=a\cdot 0+b\cdot 1=0+b=b$

③の#は，A△Bの△に対応する記号で，
$A\triangle B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ である．



したがって
$a\#b=a\cdot b'+a'\cdot b$
である．

4．ド・モルガンの法則の証明

ド・モルガンの法則はブール代数で書くと次のように書かれる．

Ⅰ．$(a\cdot b)'=a'+b'$
Ⅱ．$(a+b)'=a'\cdot b'$

Ⅰの証明

$$
\begin{aligned}
&\{\underline{(a\cdot b)}\cdot(a'+b')\}'\\
&=(a\cdot b\cdot a'+a\cdot b\cdot b')' && \text{分配法則}\\
&=(a\cdot a'\cdot b+a\cdot b\cdot b')' && \text{交換法則}\\
&=\{(a\cdot a')\cdot b+a\cdot(b\cdot b')\}' && \text{結合法則}\\
&=(0\cdot b+a\cdot 0)'\\
&=0'\\
&=1 \cdots\cdots\cdots (1)
\end{aligned}
$$

また　$\underline{a\cdot b}+(a'+b')$

$$\left.\begin{aligned}&=(a+a'+b')\cdot(b+a'+b')\end{aligned}\right]\ \mathrm{D4}$$

$$\begin{aligned}&=(1+b')\cdot(1+a')\\&=1\cdot 1\\&=1\ \cdots\cdots\cdots\ (2)\end{aligned}$$

(1), (2)から

$$a\cdot b+(a'+b')=\{(a\cdot b)\cdot(a'+b')\}'\ \cdots\ (3)$$

また　$a\cdot b=1-(a\cdot b)'\ \cdots\cdots\cdots\ (4)$

$$\begin{aligned}&\{(a\cdot b)\cdot(a'+b')\}'\\&\quad=1-(a\cdot b)\cdot(a'+b')\ \cdots\cdots\cdots\ (5)\end{aligned}$$

(4), (5)を(3)に代入して

$$\begin{aligned}&1-(a\cdot b)'+(a'+b')\\&\quad=1-(a\cdot b)\cdot(a'+b')\\&\quad=1-\{a\cdot a'\cdot b+a\cdot b\cdot b'\}\\&\quad=1-\{0\cdot b+a\cdot 0\}\\&\quad=1-0=1\end{aligned}$$

ゆえに　$(a\cdot b)'=a'+b'$　　（証明終わり）

IIの証明

$\underline{(a+b)}\cdot(a+b)'$

$$\left.\begin{aligned}&=(a+b)\{1-(a+b)\}\\&=(a+b)\cdot 1-(a+b)\cdot(a+b)\end{aligned}\right]\ \text{分配法則}$$

$$\begin{aligned}&=(a+b)-(a+b)\\&=0\ \cdots\cdots\cdots\ (1)\end{aligned}$$

また　$\underline{(a+b)}\cdot(a'\cdot b')$

$$\begin{aligned}&=a\cdot a'\cdot b'+b\cdot a'\cdot b' && \text{分配法則}\\&=(a\cdot a')b'+(b\cdot b')a' && \text{交換・結合法則}\\&=0\cdot b'+0\cdot a'\\&=0\ \cdots\cdots\cdots\ (2)\end{aligned}$$

(1), (2)から

$$(a+b)\cdot(a+b)'=(a+b)\cdot(a'\cdot b')$$

ゆえに $(a+b)'=a'\cdot b'$　　（証明終わり）

このようにIの証明のときは $\underline{a\cdot b}$ を，IIのそれは，$\underline{a+b}$ を添えて，それぞれ分配，交換，結合の諸法則や補集合の定理 $a'=1-a$ 等を用いればよいことに気づき大変感激したのである．

5．おわりに

ブール代数，ブール関数に興味を持ってから日も浅く，こうして発表するのは本当に気がひけるが，「数研通信」に，もうそろそろブール代数の語彙が出てきてよいのではないかと思い，半可通をかえりみず書いた次第である．

終わりに当たり，ブール代数のご指導と示唆をあたえて下さった玉川大教授河口央商先生，同僚の高橋照彦教諭に心から感謝の意を表したい．

参考文献

1．Logic and Algorithms … with applications to computer and information sciences … By Robert R Korfhage.
A Wiley International editions.

2．現代数学概説 I（小平邦彦・彌永晶吉共著） 岩波書店

3．ブール代数とスイッチ回路（メンデルソン著・大矢建正訳） マグロヒル

4．現代のブール代数（S．コッペンベルク著・廣瀬健監訳・渕野昌訳） 共立出版 KK.

5．プリント「平成６年度　夏期スクーリング代数学 I（ブール代数とブール関数の最小化）」
玉川大プリント

6．代数学辞典上・下　第二版　聖文社

（静岡学園高等学校）