95年入試の良問の背景を探る

宮川(みやかわ)　幸隆(ゆきたか)

今年もまた，入試問題に数題の良問かつ難問が現れました．本稿では，それらの背景を探ります．

> 自然数 n の関数 $f(n)$，$g(n)$ を
> $f(n)=n$ を7で割った余り，
> $g(n)=3f\left(\sum_{k=1}^{7}k^n\right)$
> によって定める．
> (1)　すべての自然数 n に対して $f(n^7)=f(n)$ を示せ．
> (2)　あなたの好きな自然数 n を1つ決めて $g(n)$ を求めよ．その $g(n)$ の値をこの設問(2)におけるあなたの得点とする．
> 〔京都大・文系・後期〕

解説　整数 a，b の差が整数 m の倍数であるとき，a と b とは m を法として互いに**合同**であるといい，それを次のように記す．

$$a\equiv b \pmod{m}.$$

同一の法を有する合同式は加法，減法，乗法に関する限り，等式と同様に取り扱うことができる．すなわち，次の定理が成り立つ．

> **定理1**　$a\equiv a' \pmod{m}$，$b\equiv b' \pmod{m}$ ならば
> $a\pm b\equiv a'\pm b' \pmod{m}$，
> $ab\equiv a'b' \pmod{m}$．

除法に関しては合同式は等式のように単純には反応しない．

> **定理2**　$ac\equiv bc \pmod{m}$ のとき，
> $(c,\ m)=1$ なる条件のもとにおいて
> $a\equiv b \pmod{m}$
> である．一般に $(c,\ m)=d$ ならば，
> $m=dm'$ とおくとき
> $a\equiv b \pmod{m'}$．

合同式を用いると，上の京都大の問題の(1)は，

「すべての自然数 n に対して

$$n^7\equiv n \pmod{7}$$

を示せ．」と表されることになる．すなわち，n^7-n が7の倍数であることを示せばよいのであるが

$$\begin{aligned}
n^7-n&=n(n^3-1)(n^3+1)\\
&=n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)\\
&=n(n-1)\{(n-2)(n+3)+7\}\\
&\quad\times(n+1)\{(n+2)(n-3)+7\}\\
&=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)\\
&\quad+(7\text{の倍数})
\end{aligned}$$

となり，連続7整数の積

$$(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

は7の倍数であるから，(1)は示された．

(2)　$k^n\equiv f(k^n) \pmod{7}$ $(k=1,\cdots\cdots,7)$ であるから，定理1により

$$\sum_{k=1}^{7}k^n\equiv\sum_{k=1}^{7}f(k^n) \pmod{7}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f\left(\sum_{k=1}^{7}k^n\right)&=f\left(\sum_{k=1}^{7}f(k^n)\right)\\
&=f(1+f(2^n)+\cdots\cdots+f(6^n))
\end{aligned}$$

$[\because\ f(7^n)=0,\ f(1^n)=1]$

ここで，(1)により，定理1とから

$$\begin{aligned}
2^n&=2^{n-1}\cdot2\equiv2^{n-1}\cdot2^7=2^{n+6}=2^{n+5}\cdot2\\
&\equiv2^{n+5}\cdot2^7=2^{n+12}\equiv\cdots\cdots \pmod{7},
\end{aligned}$$

すなわち　$f(2^n)=f(2^{n+6})=f(2^{n+12})=\cdots\cdots$

等々であり，$1\leqq n\leqq6$ で調べれば十分である．

$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
&f(1+f(2)+\cdots\cdots+f(6))\\
&=f(1+2+\cdots\cdots+6)=f(21)=0,
\end{aligned}$$

$n=2$ のとき

$$\begin{aligned}
&f(1+f(2^2)+\cdots\cdots+f(6^2))\\
&=f(1+4+2+2+4+1)=f(14)=0,
\end{aligned}$$

$n=3$ のとき

$$\begin{aligned}
&f(1+f(2^3)+\cdots\cdots+f(6^3))\\
&=f(1+1+6+1+6+6)=f(21)=0,
\end{aligned}$$

$n=4$ のとき

$$f(1+f(2^4)+\cdots\cdots+f(6^4))$$
$$=f(1+2+4+4+2+1)=f(14)=0,$$

$n=5$ のとき

$$f(1+f(2^5)+\cdots\cdots+f(6^5))$$
$$=f(1+4+5+2+3+6)=f(21)=0,$$

$n=6$ のとき

$$f(1+f(2^6)+\cdots\cdots+f(6^6))$$
$$=f(1+1+1+1+1+1)=f(6)=6$$

であるから，**n を 6 と決めれば，$g(n)=3\times 6=18$ 点という本問における最高点を得る．**

---

x と y の 2 文字からなる文字列 z_n を次の規則(イ)，(ロ)で順次定めていく．

(イ) $z_1=x$ とおく．

(ロ) z_n の中に現れるすべての x を yx で，すべての y を xx でおき換えてできる文字列を z_{n+1} とする $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$．

例えば $z_2=yx$，$z_3=xxyx$，$z_4=yxyxxxyx$ である．2 次の正方行列 A，B に対して，z_n の中の x を A で，y を B でおき換え，行列の積をつくってできる行列を C_n とする．例えば $C_1=A$，$C_2=BA$，$C_3=AABA$ (行列の積) である．

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ のとき，

$n\geqq 3$ ならば $C_n=\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ であることを示せ．　〔京都大・理系・前期〕

解説　$C_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$,

$$A^2=\mathrm{tr}(A)A-\det(A)E$$

$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tr}(A),\ \det(A) \text{ はそれぞれ} A \text{のトレース，}\\ \text{行列式；} E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.\end{array}\right.$

$$=2A-E=\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix},$$

$$C_3=A^2C_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},$$

$$C_4=C_2{}^2C_3$$
$$=\{\mathrm{tr}(C_2)C_2-\det(C_2)E\}C_3$$
$$=\{0\cdot C_2-(-1)E\}C_3=C_3,$$
$$C_5=C_3{}^2C_4$$
$$=\{\mathrm{tr}(C_3)C_3-\det(C_3)E\}C_4$$
$$=\{0\cdot C_3-(-1)E\}C_4=C_4=C_3,$$

……によって，帰納的に，

$$C_{n+2}=C_n{}^2C_{n+1}\ (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

である．また，

$$C_{n+2}=C_3\ (n=1, 2, \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

と予想される．しかるに上述のことにより，$n=2$ のとき①は成り立つ(明らかに $n=1$ のときは①は成り立っている)．そこで $n=k$，$k+1$ のとき，①は成り立っていると仮定すると

$$C_{k+2+2}=C_{k+2}{}^2C_{k+1+2}=C_3{}^2C_3$$
$$=\{\mathrm{tr}(C_3)C_3-\det(C_3)E\}C_3$$
$$=\{0\cdot C_3-(-1)E\}C_3=C_3$$

によって，$n=k+2$ のときも①は成り立つ．

本問の背景は $C_2{}^2=C_3{}^2=E$．更に言うと，

$$\begin{cases}\mathbf{tr}(C_2)=\mathbf{tr}(C_3)=0\\ \mathbf{det}(C_2)=\mathbf{det}(C_3)=-1\end{cases}$$

と，$C_{n+2}=C_n{}^2C_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ である．

流石に京都大学らしく，両問ともに型破りの良問かつ難問であると思います．特に前者は文系よりも寧ろ理系の問題として出題すべきではなかったでしょうか！

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に対し $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおく．$x^2-3y^2=1$ ならば $x_1{}^2-3y_1{}^2=1$ であることを示せ．

(2) 等式 $x^2-3y^2=1$ を満たす正の整数 x，y に対して $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおけば $y>y_1\geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ によって定めると，等式

$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$

が成り立つことを示せ．

(4) 等式 $x^2-3y^2=1$ を満たす正の整数の組 (x, y) は(3)で与えられた整数の組 $(a_n,\ b_n)$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ のどれかに等しいことを証明せよ．

〔明治大・理工〕

解説　(1)，(2)は簡単かつ初等的なので，以下では

(3), (4)の背景を探ります．

実は筆者は，「数研通信・数学 No. 9」で，本問の類題である '88 年の京都大・理系の問題の背景を探りました(またしても京都大学！)．

しかし，「数研通信・数学 No. 9」をお持ちでない方もいらっしゃるでしょうから，ここでは，その概略を簡潔にまとめてみたいと思います．

m を 1 以外の平方因数をもたない整数とし，x，y を任意の有理数として

$$x+y\sqrt{m}$$

のような数全体の集合を考えます．このような集合は **2 次体**と呼ばれ，$\mathrm{K}(\sqrt{m})$ という記号で表されます．特に $m>0$ のときは**実の** 2 次体と呼ばれます．

2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ に属する 2 つの数

$$\alpha=x+y\sqrt{m},\quad \alpha'=x-y\sqrt{m}$$

を互いに**共役**であるといいます．

互いに共役な 2 数の和および積は有理数です：

$$\alpha+\alpha'=2x,\quad \alpha\alpha'=x^2-my^2$$

特に積 $\alpha\alpha'$ を α または α' の**ノルム**(記号 $N\alpha$)と呼びます．

$\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の特別な要素として，$\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数”なるものを定義することを考えます．“整数”の定義を 2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の数の上に拡張するに当たっては，次の条件を目標とします；

(I) α，β が“整数”ならば，$\alpha\pm\beta$，$\alpha\beta$ も“整数”である．

(II) α が“整数”ならば，それと共役な α' も“整数”である．

(III) $\{\alpha|\alpha$：“整数”かつ α：有理数$\}$
=(普通の整数全体の集合)

(IV) “整数”の範囲は上記 3 つの条件のもとにおいてできる限り広くする．

いま，a，b を普通の整数(**有理整数**と呼ぶ)として

$$a+b\sqrt{m}$$

のような形の数を $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数”とすることにすれば，上記(I)，(II)，(III)の条件が満たされることは明らかですが，ここに特別の考慮を要するのは条件(IV)です．

さて，上記(I)～(III)の条件を満たすような，$\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の，最大の部分集合の要素を改めて $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数”と呼ぶことにすると，$m=3$ のとき，次の定理が成り立ちます．

> **定理 3**　2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{3})$ の“整数”は，
> $x+y\sqrt{3}$ (ここに x，y は有理整数)である．

2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数”に対しても，有理整数の場合と同様に，整除の定義を行うことができます．

すなわち，$\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数” α，β の商 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\gamma$ が再び $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数”であるとき，α は β で割り切れるといい，α を β の倍数，β を α の約数といいます．すべての“整数”の約数であるような“整数”を**単数**と呼びます．単数は 1 の約数に他なりません．

実 2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の単数については，次の**著しい定理**が成り立ちます：

> **定理 4**　実 2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の 1 より大なる任意の単数は，そのような単数のうちの最小のもの ε_0 によって
> $$\varepsilon_0{}^n\ (n：自然数)$$
> の形に表される．

また，2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数”のノルムについては，次の定理が成り立ちます：

> **定理 5**　α，β を同一の 2 次体の“整数”とする．α が β で割り切れるならば，有理整数 $N\alpha$ は有理整数 $N\beta$ で割り切れる．

証明　$\alpha=\beta\gamma$ で，γ は“整数”であるから，$N\gamma$ は有理整数で[∵ 左段の(I)，(II)，(III)による]，
$N\alpha=N\beta\cdot N\gamma$ (各自確かめて下さい)．

(証明終)

次に α を $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の単数とすると，α は 1 の約数ですから

$\alpha\beta=1$ …… ①

であるような $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の“整数” β が存在します．①により

$$N\alpha\cdot N\beta=N1=1$$

であるから，$N\alpha=\pm1$ となります．

このように，**2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{m})$ の単数 α は $N\alpha=\pm1$ を満たします．**

さて，明治大の問題に戻りましょう：

まず，実 2 次体 $\mathrm{K}(\sqrt{3})$ を考えます．

いま述べたばかりのことによって，$\mathrm{K}(\sqrt{3})$ の単数全体の集合は

$\mathrm{G}=\{x+y\sqrt{3}\,|\,x,\ y：有理整数,\ x^2-3y^2=\pm1\}$
です．

Gの要素で，1より大なるもののうちの最小のもの ε_0 を求めることを考えましょう．

$\varepsilon_0=a+b\sqrt{3}>1$ …… ⑤ とおくと

$$a^2-3b^2=\pm1$$

$$\therefore\ |a-b\sqrt{3}|=\frac{1}{|a+b\sqrt{3}|}<1$$

$$\therefore\ \begin{cases} a-b\sqrt{3}>-1 & \cdots\cdots ⑥ \\ -1<b\sqrt{3}-a & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

したがって，⑤+⑥，⑤+⑦から $a>0,\ b>0$
これを満たす a, b のうちで，$a+b\sqrt{3}$ を最小にし $a^2-3b^2=\pm1$ を満たすものは $(a,\ b)=(2,\ 1)$
逆に，このとき⑤を満たすから $\varepsilon_0=2+\sqrt{3}$

さて

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\longleftrightarrow 2+\sqrt{3}=\varepsilon_0,$$

$$A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow 7+4\sqrt{3}=\varepsilon_0^2,$$

$$A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14+12\\7+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\15\end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow 26+15\sqrt{3}=\varepsilon_0^3,$$

……

という対応を考えると，任意の自然数 n に対して

$$\varepsilon_0^n\longleftrightarrow A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

と対応していて(正確には帰納法による)，明治大の問題の(3)が成り立つ．また，等式 $x^2-3y^2=1$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ に対して，

$$\begin{cases} x+y\sqrt{3}\in\mathrm{G} \\ x+y\sqrt{3}>1 \end{cases}$$

であるから，$x+y\sqrt{3}$ は実2次体 $\mathrm{K}(\sqrt{3})$ の1より大なる単数となり，定理4によって

$$x+y\sqrt{3}=\varepsilon_0^n\ (n：自然数)$$

の形に表される．よって，

$$x+y\sqrt{3}\longleftrightarrow A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$$

と対応するから，$(x,\ y)=(a_n,\ b_n)$ となり，明治大の問題の(4)も示された．

以上によって，(3)と(4)の関連が明らかとなり，(4)は，等式 $x^2-3y^2=1$ を $x^2-3y^2=\pm1$ に替えても成り立つ，ということまで分かった．

〈参考文献〉

[1] 高木貞治著，初等整数論講義，共立出版刊
[2] 雑誌「大学への数学」1995年4，5月号，
「入試特集　1995年大学入試問題」，東京出版刊

(静岡県立 沼津東高等学校)