

高校数学における Logistic 写像の教材開発

ひの まさゆき
日野 雅之

要約：カオス理論の研究対象である Logistic 写像を高校数学におけるコンピュータ教育あるいは数値計算，アルゴリズムの学習に活かすための教材開発を行う。

1 はじめに

新課程の高校数学において，数値計算が大幅に導入されることになった^[1]。「数学A」における計算とコンピュータ，「数学B」における算法とコンピュータの項目において数値計算が導入され，特に「数学C」ではその目標が，応用数理の観点からコンピュータを活用し事象を数理的に考察し処理する能力を伸ばす，とされている。

本稿ではコンピュータを用いて，高校数学教育に適した教材開発の1つの案を提示する。次節において概観する Logistic 写像は，教材として次のような意義をもつと考えられる。第一に，数学的に豊富な内容を含み，高校数学の基本から応用まで幅広い分野の学習に適することである。最近の大学入試においてもしばしば題材に使われていて，例えば，

数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ が
 $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ ($n=1, 2, \dots$) を満たすものとする。 $0 < r < 1, 0 < x_1 < 1$ のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。 [93 山口大]

などがある。

教材としての第二の意義として，Logistic 写像がプログラミングに関する良い題材を与えることがあげられる。生徒にとっては，BASIC プログラム自身の学習のみならず，アルゴリズムとして重要な反復法，そしてグラフィックスの基礎について学ぶことが出来る格好の教材である。更に，教師の立場から，視覚教材の開発研究の素材として役立つだけでなく，カオス理論やフラクタルなど最近の数理的なトピックスを含んだ内容を通じて数値計算やプロ

グラミングの教材の研究ができるといった意味においても有意義である。

第2節では Logistic 写像を概観し，第3節では Logistic 写像と Logistic 方程式の反復法の詳細をまとめることによって，高校数学における教材としての意味について強調する。第4節で，周期軌道の概念をやや詳細に紹介することを通して第3節の内容を補強する。第5節においてプログラムのコーディング開発例を示し，第6節で本稿のまとめを行う。

2 Logistic 写像の概観

Logistic 写像とは， $x \in [0, 1]$ に対する関数 $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ($\mu > 0$) をいう。

これに基づく漸化式

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) = \mu x_n(1-x_n) \quad (1)$$

を通常 Logistic 方程式と呼ぶ。この方程式についてはカオス理論に関する多くの文献において解説がなされている。その歴史は150年以上昔にさかのぼり，その歴史的な経緯については文献[2]に詳しく記述されている。

ここで短くまとめておく。1838年ベルギーの数学者 P. F. Verhulst によって，実験室中での昆虫の増殖による個体数 N が時刻 t とともに変化する様子が，方程式

$$\frac{dN}{dt} = AN - BN^2 \quad (2)$$

によってモデル化された^[3]。 $N \approx 0$ のとき， N は指数関数的に増加し， $N = N_0 e^{At}$ に従い，ある程度増加すると，食料の減少といった2次の非線形項の寄与により増加率が鈍り，ある一定値に近づくという性質をもつ。

次に Logistic 微分方程式(2)から Logistic 方程式(1)が導かれる様子を示す^[2]。微小時間間隔 τ ごとに時間を区切り $t = n\tau$ ($n=0, 1, 2, \dots$)， $N_n = N(n\tau)$ とし，式(2)を差分方程式

$$\frac{N_{n+1}-N_n}{\tau} = AN_n - BN_n^2 \quad (3)$$

で近似する。この式において $N_n = \frac{1+\tau A}{\tau B} x_n$ および $\mu = 1 + \tau A$ とおくと Logistic 方程式(1)を得る。

ここで十分時間が経ったあと、個体数が近づく定常値は $\mu > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \frac{1}{\mu}$ である。この値を x^* とおくと、 x^* は方程式

$$f_\mu(x^*) = x^* \quad (4)$$

を満たすことは明らかであり、したがって定常値を求めることは方程式(4)の解を探すことである。

方程式(4)は2次方程式でありもちろん解析的に解けるが、ここでは数値的に x^* を求めるという観点から議論を進める。式(4)の解を求めることは、放物線 $y = f_\mu(x)$ と直線 $y = x$ の交点の座標を求めることに対応し、反復法による解法が考えられる。

3 反復法と極限

Logistic 写像はそもそもカオス理論の研究対象として、振動系における非線形項のもたらす影響を調べる上で導入された Poincaré 写像の単純なモデルである。これについては多くの文献に記述が詳しい。例えば文献 [4, 5, 6, 7] およびその中の References を参照されたい。本稿の目的は、高校数学の教材開発にあるので、したがって以下では、数列 x_n の振舞いという面に着目して議論を進める。

まず、関数 $f_\mu(x)$ の特徴についてまとめる。以下混乱のない限り添字 μ を省略する。定義域 $[0, 1]$ におけるグラフの概形(図1)から判るように、 $f(x)$ は上に凸で、 $x = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{\mu}{4}$ をとる。関数の値域 $[0, \frac{\mu}{4}]$ が定義域 $[0, 1]$ に含まれる場合を考え、パラメータ μ を $0 < \mu \leq 4$ とする。対角線 $y = x$ との交点は固定点(Fixed points)とよばれ、その座標は $x = 0$ および $x = p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$ で与えられる。図1は放物線 $y = f(x)$ および対角線 $y = x$ のグラフである。更に x_0 を初期値とした x_n の値を逐次得る様子が示されている。 x_0 から上方に直線を引き、曲線 $y = f(x)$ との交点から横方向に直線を引く。横線が直線 $y = x$ と交わる点の座標が x_1 を与え、 x_1 から再度縦方向に直線を引き $y = f(x)$ との交点から横方向に移動し $y = x$ との交点を x_2 とする。このよ

うにして数列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ が得られ、図1では固定点 p_μ に収束する様子が示されている。

このように固定点 $x = 0$ または p_μ は数列の極限値としての側面をもつが、実は $\mu (0 < \mu \leq 4)$ の値によって収束の様子が変化する点が興味深いので、 μ の値の範囲をいくつか分割し以下に逐次まとめる。

$0 < \mu \leq 1$ この場合 $[0, 1]$ における固定点は $x = 0$ のみであり(図1a)、 x_n は0に収束し、この固定点を安定固定点またはアトラクタ(attractor)とよぶ。

$1 < \mu \leq 3$ $[0, 1]$ には2つの固定点 $x = 0$ および $x = p_\mu$ がある。 $0 < \mu \leq 1$ で安定であった固定点 $x = 0$ は不安定となり、アトラクタではなくなり、 $x_0 \in (0, 1)$ に対し x_n は $x = 0$ から離れていく。このため固定点 $x = 0$ を不安定固定点あるいはリペラー(repeller)とよぶ。他方、この場合 $x = p_\mu$ がアトラクタとなり、収束の様子を図1bおよび図1cに示した。

$x = 0$ が不安定になり、 $x = p_\mu$ が安定になる理由はその点における微分係数 $f'(p_\mu)$ の値と収束性に関する次の定理による。

定理1 f が固定点 $x = p$ において微分可能であるとき

- a. $|f'(p)| < 1$ ならば、 p はアトラクタであり、
- b. $|f'(p)| > 1$ ならば、 p はリペラーであり、
- c. $|f'(p)| = 1$ ならば、 p はアトラクタ、リペラーまたはどちらでもない。

この定理の証明は例えば文献[4]に詳しく述べられている。 $f(x) = \mu - 2\mu x$ であるから、定理1に従えば $f'(0) = \mu$ は $0 < \mu < 1$ において $0 < f'(0) < 1$ したがって固定点 $x = 0$ はアトラクタである。

$1 < \mu$ ならば $1 < f'(0)$ となり固定点 $x = 0$ はリペラーとなる。他方、 $1 < \mu < 3$ のとき、 $0 < |f'(p_\mu)| = |2 - \mu| < 1$ を満たすために、 μ が1を越えると $x = p_\mu$ はアトラクタとなる。

$3 < \mu \leq 4$ この範囲の μ に対する数列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ の極限はきわめて興味深い振舞いをみせる。 $\mu = 3$ においてちょうど $f'(p_\mu) = -1$ であり、 μ の値が3を越えると $|f'(p_\mu)| > 1$ となるので、それまで安定であった固定点 $x = p_\mu$ は不安定になる。そのため、数列 x_n は $x = 0$ および $x = p_\mu$ どちらの固定点にも

収束することがない。

μ の値を少しずつ変化させて、 x_n の漸近的な振舞いをグラフを用いて調べる。まず $\mu=3.3$ の場合が図 1 d で、これは初期値を $x_0=0.2$ として x_n を反復法により求めていったグラフである。図 1 d から判るように x_n は $\{q_\mu, r_\mu\}$ の間で振動する軌道に漸近的に近づく。 $x=q_\mu$ および $x=r_\mu$ は周期 2 の周期点とよばれ、軌道 $\{q_\mu, r_\mu\}$ を周期 2 軌道(2-cycle)とよぶ。そしてこの軌道が $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ のアトラクタである。

μ を少し増やし $\mu=3.53$ の場合には更に周期が増加し x_n は周期 4 軌道(4-cycle)がアトラクタとなる(図 1 e)。更に $\mu=3.84$ としたときのアトラクタは周期 3 軌道(3-cycle)であり、その様子を図 1 f に示す。図 1 e および図 1 f では収束したあとの周期軌道のみを示してある。

このように Logistic 方程式の反復によって数列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ の極限を調べると、 μ の値の変化とともに様々な様相を呈することが判る。特に $3 < \mu \leq 4$ の場合の極限が様々な周期軌道になることは興味深い点であり、次節において μ が 3 を越えたときの周期 2 軌道について更に詳しく考察する。

4 周期 2 軌道

前節において $3 < \mu$ において周期軌道が現れることが示された。 $1 < \mu < 3$ において固定点 $x=p_\mu$ がアトラクタであり、 x_n は p_μ に収束した。これは周期 1 軌道(1-cycle)である。 μ が 3 を越えると周期軌道 $\{q_\mu, r_\mu\}$ に収束し、この軌道を周期 2 軌道(2-cycle)とよんだ(以後簡単のため混乱のない場合には添字の μ を省略し q, r などと表す)。

周期 2 軌道の周期点 $x=p$ および $x=r$ は $x=0$ および $x=p$ とともに 4 次方程式

$$x=f(f(x)) \quad (5)$$

の解である。あるいは連立方程式

$$q=f(r), r=f(q) \quad (6)$$

の解とも考えられる。したがって $x=q, r$ は 4 次関数 $f(f(x))$ の固定点でありアトラクタである。

図 1 g に $y=f(f(x))$ のグラフを対角線 $y=x$ とともに示す。グラフは 4 つの交点を持ち、固定点 q および r は 2 次方程式

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu+1)x + \mu + 1 = 0 \quad (7)$$

の解であり、

$$\left. \begin{matrix} q \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \{1 \mp \sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}\}$$

で与えられる。

ここで $f(x)$ の周期 2 軌道 $\{q, r\}$ がアトラクタになるための μ の条件を求める。 $f^2(x) \equiv f(f(x))$ とすると、 $\{q, r\}$ が $f(x)$ の周期 2 軌道であるのは

$$f^2(x) \text{ の固定点である } x=q, r \text{ が } f^2(x) \text{ のアトラクタである}$$

ことである。ここで 2 次方程式(7)に対する解と係数の関係を用いると、関係式

$$(f^2)'(q) = (f^2)'(r) = f'(q)f'(r)$$

$$= (\mu - 2\mu q)(\mu - 2\mu r) = -\mu^2 + 2\mu + 4$$

が得られ、定理 1 に従うと

$$|(f^2)'(q)| < 1$$

が成り立てばよいことが判る。したがって

$$|\mu^2 - 2\mu - 4| < 1$$

を解くことによって、 $\{q, r\}$ が周期 2 軌道になる条件

$$3 < \mu < 1 + \sqrt{6} = 3.44948 \dots$$

が得られる。

$\mu > 1 + \sqrt{6}$ になると $\{q, r\}$ は不安定な軌道となり、そして図 1 e の例のように周期 4 軌道が現れる。この場合も、周期 2 軌道が現れた場合と同様に $f^2(f^2(x))$ の安定な固定点が $f(x)$ の周期 4 軌道となる。このような状況が繰り返され、周期 2^k 軌道が μ の増加とともに次々と現れる。そうして、 μ が $\mu_\infty = 3.56995 \dots$ (Feigenbaum number) という定数値を越えると、周期が ∞ となって、 x_n はどのような周期軌道にも収束できない状況になる。 $\mu=3.8$ の場合の Logistic 方程式の反復の様子を示したものが図 1 h であり、無限に続く軌道が見て取れる。

このように周期が 2 倍になる現象は CHAOS 理論においては、周期倍分岐 (Period-doubling bifurcation) とよばれる^[2, 4, 5]。

5 反復法の BASIC プログラム

前節において示したいくつかの図を与える BASIC プログラムのコーディング例を図 2 に示す。単純な内容なので詳細は省略するが入力データに関して短くまとめておく。

プログラムを起動すると入力要求のプロンプトがあり、

Mu パラメータ μ の値。

ORDER 合成関数 $f(\underbrace{f(\dots f(x)\dots)}_n)$ の次数 n

($n=1, 2, \dots$),

X0 反復の初期値 x_0 。

NMIN, NMAX グラフに表示する反復の回数の最小値と最大値を $0 \leq \text{NMIN} \leq \text{NMAX}$ の範囲で指定する。

の順で入力する。

最後に、いくつかの周期軌道が始まる μ の値と不安定になる μ の値を、Drazin^[5] および May^[6] から引用し、表 1 にまとめておく。プログラムを実行する際に有用である。

表 1：いくつかの周期軌道が始まる(終わる) μ の近似値 μ_{\min} (μ_{\max})。

周期	μ_{\min}	μ_{\max}
2	3	3.4495
4	3.4495	3.544
8	3.5444	3.564
3	3.8284	3.8415
4	3.9601	3.9608
5(a)	3.7382	3.7411
5(b)	3.9056	3.9061
6	3.6265	3.6304

6 まとめ

Logistic 写像をその材料に選び、高校数学におけるコンピュータを用いた視覚的教材の開発の 1 つの案を示した。

本教材は、2 次関数のグラフ、グラフの交点の座標と方程式の解、数列の帰納的定義、数列の収束と発散、合成関数、微分と接線の傾き等、高校数学における幅広い分野の学習に適していると考えられる。このように、Logistic 写像は単純な 2 次関数であるにも拘らず、生徒にとって有用な教材になるというだけでなく、CHAOS 理論といった数理的に話題性に富む内容であり教師の立場からも関心をひくも

のであり、教材として取り入れる価値は十分にあると考えられる。

反復法の教材として他の関数を扱えるようにプログラムを発展させること、そして教育現場で教材をどの場面でどの時期に用いるのが有効かなど実践を通して考察を深めることが今後の課題である。

参考文献

- [1] 高等学校学習指導要領解説 数学編, 平成元年12月, 文部省.
- [2] 山口昌哉, カオスとフラクタル 非線形とは何か, BLUE BACKS (講談社), 1986.
- [3] P. F. Verhulst, Corr. Math. Phys., **10** (1838) 113-21.
- [4] D. Gulick, ENCOUNTERS WITH CHAOS, McGraw-Hill, New York, 1992.
- [5] P. G. Drazin, Nonlinear systems, Cambridge University Press, New York, 1992.
- [6] R. M. May, Nature, **261** (1976) 459.
- [7] M. J. Feigenbaum, Los Alamos Science, **1** (1980) 4.

(東京都 穎明館高等学校)



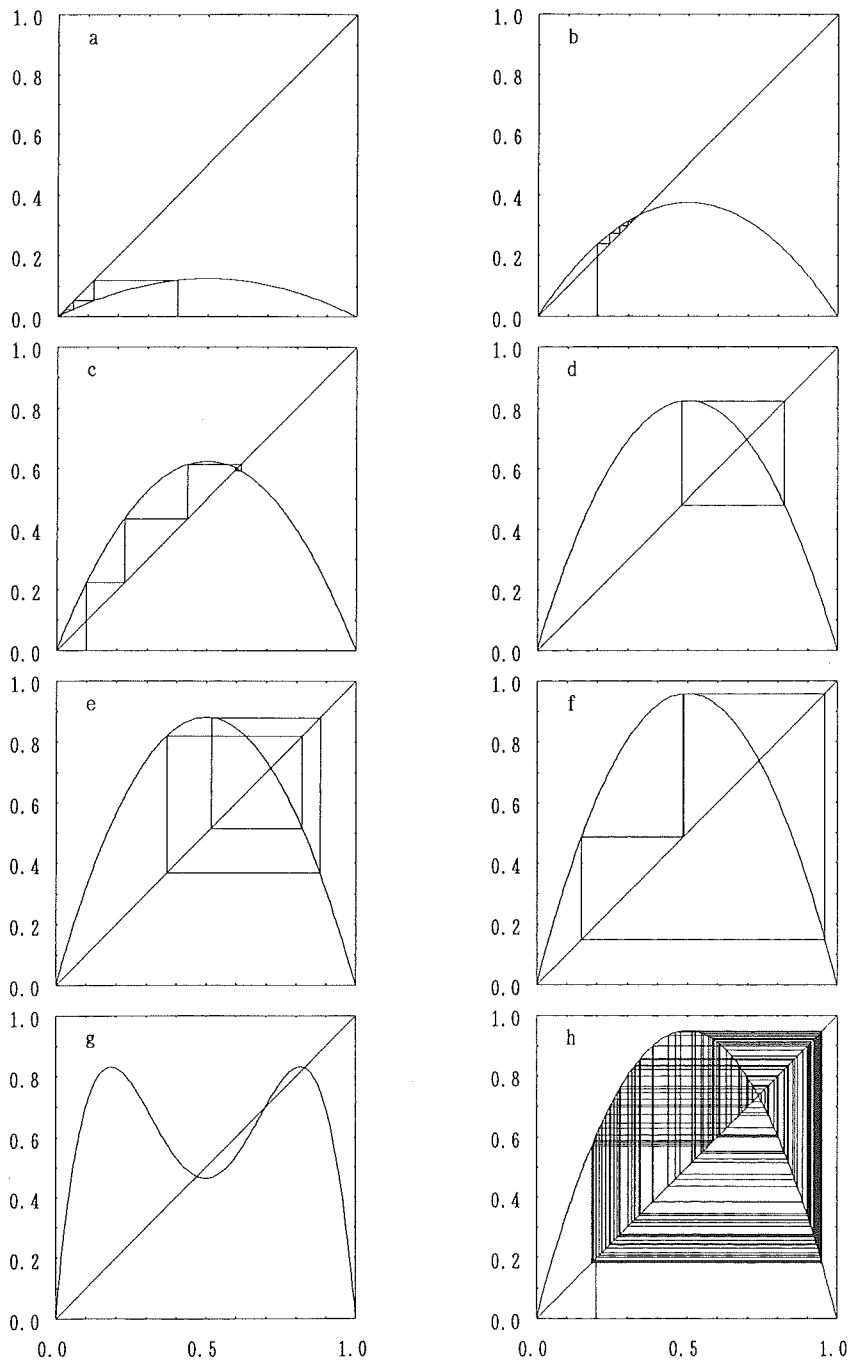


図1 : Logistic 方程式の反復の様子. μ および初期値 x_0 の値は a) 0.5, 0.4, b) 1.5, 0.2, c) 2.5, 0.1, d) 3.3, 0.2, e) 3.53, 0.2, f) 3.84, 0.2, g) 3.33, h) 3.8, 0.2. e), f) に関しては 50 回以降の反復を示した. g) では 2 次の合成関数が示されている.

```

10 CLS 3 : SCREEN 3
20 PRINT "*****"
30 PRINT "* LOGISTIC RETURN MAP *"
40 PRINT "*****"
50 XI=0 : XF=1 : YI=0 : YF=1
60 XMIN=XI-(XF-XI)*.8
70 XMAX=XF+(XF-XI)*.2
80 YMIN=YI-(YF-YI)*.1
90 YMAX=YF+(YF-YI)*.2
100 WINDOW (XMIN, YMIN)-(XMAX, YMAX)
110 LINE (XI, YI)-(XF, YI)
120 LINE (XI, YF)-(XF, YF)
130 LINE (XI, YI)-(XI, YF)
140 LINE (XF, YI)-(XF, YF)
150 D1=.01
160 D2=1!-D1
170 FOR I=0 TO 10
180 S=I*.1
190 LINE (S, 0)-(S, D1)
200 LINE (S, 1)-(S, D2)
210 LINE (0, S)-(D1, S)
220 LINE (1, S)-(D2, S)
230 IF (I MOD 2) <> 0 GOTO 260
240 LOCATE 30+4 * I, 22 : PRINT USING"#.#" ;
S
250 LOCATE 28, 21-2 * I : PRINT USING"#.#" ;
S
260 NEXT I
270 'DRAW QUADRATIC CURVE  $y=ax(1-x)$ 
280 LOCATE 0, 5
290 INPUT "Mu : ", A :
INPUT "ORDER : ", ORDER
300 MAXMS=320 : XOLD=0 : YOLD=0
310 XOLD=0 : YOLD=0
320 DX=1/MAXMS
330 FOR I=1 TO MAXMS
340 X=DX*I
350 GOSUB *FUNCTION
360 LINE (XOLD, 1-YOLD)-(X, 1-Y)
370 XOLD=X : YOLD=Y
380 NEXT I
390 'DRAW LINE  $y=x$ 
400 LINE (0, 1)-(1, 0)
410 'BEGIN ITERATION
420 INPUT "X0 : ", X0
430 INPUT "NMIN : ", NMIN : INPUT "NMAX : ",
NMAX
440 X=X0 : XOLD=X0 : YOLD=0 : I=0
450 *ITERATE
460 I=I+1
470 IF I>NMAX THEN GOTO 660
480 LOCATE 0, 11 : PRINT "For ITERATE #", I
490 IF I=1 GOTO 520
500 IF I>=NMIN THEN LINE (X, 1-Y)-(Y, 1
-Y)
510 XOLD=X : YOLD=Y : X=Y
520 GOSUB *FUNCTION
530 LOCATE 0, 12 : PRINT "Xn =", X
540 IF I>=NMIN THEN INPUT "push CR",
DUMMY
550 IF I>=NMIN THEN LINE (X, 1-YOLD)
-(X, 1-Y)
560 XOLD=X : YOLD=Y
570 GOTO *ITERATE
580 *FUNCTION
590 XV=X
600 FOR IK=1 TO ORDER
610 YV=A*XV*(1!-XV)
620 XV=YV
630 NEXT IK
640 Y=YV
650 RETURN
660 END

```

図2 : Logistic 方程式の反復の様子を描く BASIC プログラム

