

平成7年3月28日に、問題を解決する能力など現行の学習指導要領が掲げる「新しい学力」の定着ぶりをみるため、文部省が全国の小中学生に対して実施したペーパーテストの問題が一部公表された。

「問題そのものを作らせる問題」「答が幾通りもある問題」など新機軸の設問が多く、同省では、全国の学校授業が思考力をより重視する内容へと様変わりする効果を期待しているという。

「子どもが自分で問題を発見し、自分の頭で解決していく能力」に重点をおいた学習指導要領のねらいが授業を通してどのぐらい浸透し、効果をあげているかをみるのが目的であるという。

中学3年生の数学

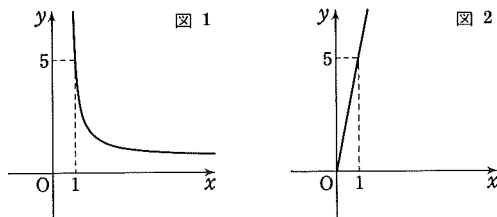
母親が買ってきたビニール・パック入りのトレットペーパー(12個)を娘が見ているイラストを掲載し、この娘が記号や数値を使って、どんな数学の問題を作れるかを1つだけ答えよ。

という問題である。

愛媛の高校入試の数学(平成7年3月)の問題にも下記のような問題が出題された。

下図の図1、図2は、伴って変わる2つの量 x 、 y の関係をそれぞれグラフに表したものである。

図1は、例えば、次のような例の場合の x 、 y の関係をグラフに表したものであるといえる。



例 「5ℓ入る容器に、毎分 x ℓの割合で水を入

れていくとき、いっぱいになるまでの時間を y 分とする。」

x 、 y の関係をグラフに表すと、図2のようになる場合の例を1つ書け。

数学の問題そのものを作る問題はこれまで出題されたことはなかった。私の高校時代、数学の得意な生徒どうして自分で作った新作問題の解き比べをしていた時期があったのを思い出す。

教師になってからも考査の前に生徒達でテストの予想問題を作らせクラスの生徒全員にプリントして配ったりしたこともあった。

また、校内模試、県内、業者模試の問題を作るたびに、数学の問題を解くときよりも問題を作る方が数学の良さ、美しさ、本質を味わうことができ、数学の問題を解く力もついてくる実感をもった。

問題を作ることで、問題解法の思考の構造がわかり、問題の難易、ポイントはどこかが理解でき、数学の授業の活性化、生徒を数学好きにするコツがつかめたようにさえ思えた。若い先生方にも、品位のあるテスト問題、模試問題を作る努力をして欲しいと思う。

生徒が「問題を作る問題」を教師が作成していくことはそう簡単にはできないのではないと思われるが、今後の研究に期待したい。

30数年数学の大学入試問題を解いたり、研究してきたが、入試問題で「問題を作る問題」は、昭和56年3月に鹿児島大学理(数学・地学)学部4番の

次の文をみて、それより自由に発想して面白いと思われる問題を2題作れ(その解答は不要)。

“関数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d は定数) に行列 $A(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を対応させる。”

という問題だけのよう思う。

【解答】

- $f_2(f_1(x))=f_3(x)$ とすれば、 $A(f_2)A(f_1)=A(f_3)$ であることを示せ。
- 行列 $A(f)$ が逆行列をもつとき、 $A(f^{-1})$ を $A(f)$ で表せ。

【解説】

$$1. f_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1} \sim A(f_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2(x) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} \sim A(f_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$f_2(f_1(x)) = \frac{a_2f_1(x) + b_2}{c_2f_1(x) + d_2}$$

$$= \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)x + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)x + (c_2b_1 + d_2d_1)} = f_3(x)$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix} \text{ となり}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}$$

となり、 $A(f_2)A(f_1)=A(f_3)$ となる。

すなわち、分数関数の合成には行列の積が対応する。

$$2. y = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ の逆関数をつくれ}$$

$$y = \frac{dx - b}{-cx + a} = f^{-1}(x)$$

したがって

$$A(f^{-1}) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc \\ \parallel \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

よって

$$A(f^{-1}) = \Delta(A(f))^{-1}$$

すなわち、分数関数の逆関数には逆行列の $\frac{1}{\Delta}$ を除いた行列が対応する。

簡単にいえば、分数関数の係数が逆行列の実数倍を除いた係数に変わり、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

1980年は鹿児島大学の理学部が独自の出題をするようになって2年目で、計算技術や問題解決のためのテクニックを見るというより、与えられた条件のもとに、論理的に考えていくという数学的な考え方を重視し、当時、「問題を作れという問題」に、とまどった受験生も多かったことと思う。しかし、何も書けないというのは理学部を目指す資格はない。

テクニックというより数学的な考え方をという傾向は明らかで、いたずらに難しい問題を解くより、緻密な論理思考を身につけることが大切である。と学習対策にも書いている。

大学入試問題は大学から高校へのメッセージでもあり、大学教育の目的にかなう生徒を選抜するための問題であると同時に高校教育に何を期待するかを入試問題に託して、高校教師、高校生に語りかけているとも受けとれる。

数学の問題で「自由に発想して面白いと思われる問題」という表現もいつまでも印象に残るが、その数学教育的意義も大きなものがある。

代数・幾何の行列の逆行列を学んだあと、必ずこの問題を生徒に考えさせることにしている。特に逆関数と逆行列には生徒は大きな感動と行列のすばらしさを感じる。

そして、公式として分数関数の逆関数は一瞬にして、正しく求めるようになる。記憶もとてもらくである。

95年のセンター試験、数Iの②の(2)に、

$$f(x) = \frac{x+6}{x+2} \text{ の逆関数は } g(x) = -\frac{\square x - \square}{x - \square} \text{ である。}$$

という配点7点の問題が出題されていたが、これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$g(x) = -\frac{2x - 6}{x - 1} \text{ と求まる。}$$

このように15年過ぎても、名作として高校教育の中に生かされ続けている問題である。

(愛媛県立 今治東高等学校)

