# 自然数の累乗の和を定積分で表示する一考察

渡邉(わたなべ)　了悟(りょうご)

考察の発端は，スタンダード基礎解析(数研出版)の次の問題からであった.*

> **328** (1) $\int_x^{x+1}(t^2+at+b)dt=x^2$ が成り立つような $a$, $b$ の値を求めよ.
> (2) 上の結果を用いて，
> 和 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$
> を求めよ.

(1)の解答は $a=-1$, $b=\dfrac{1}{6}$ である.

(2)は(1)で求めた関数を $f_2(t)$ とおけば，

$f_2(t)=t^2-t+\dfrac{1}{6}$ で $\displaystyle\int_x^{x+1}f_2(t)dt=x^2$

これに $x=1$, $2$, $3$, $\cdots\cdots$, $n$ を代入して

$$\int_1^2 f_2(t)dt=1^2,\ \int_2^3 f_2(t)dt=2^2,$$

$$\int_3^4 f_2(t)dt=3^2,\ \cdots\cdots,\ \int_n^{n+1}f_2(t)dt=n^2$$

$$\int_1^2 f_2(t)dt+\int_2^3 f_2(t)dt+\int_3^4 f_2(t)dt+\cdots\cdots+\int_n^{n+1}f_2(t)dt=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

したがって $\displaystyle\int_1^{n+1}f_2(t)dt=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ がいえる.

一方
$$\int_1^{n+1}f_2(t)dt=\int_1^{n+1}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t\right]_1^{n+1}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

であるから

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

これが(2)の目的であった.

そこで $\displaystyle\int_x^{x+1}f_1(t)dt=x$, $\displaystyle\int_x^{x+1}f_3(t)dt=x^3$ なる関数 $f_1(t)$, $f_3(t)$ もついでに **328** と同様にして求めてみることにした.

その結果は $f_1(t)=t-\dfrac{1}{2}$, $f_3(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t$ であった.

すなわち $f_1(t)=t-\dfrac{1}{2}$, $f_2(t)=t^2-t+\dfrac{1}{6}$, $f_3(t)=t^3-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t$ ということである.

これを眺めていたら

$f_2(t)=\dfrac{f_3{}'(t)}{3}$, $f_1(t)=\dfrac{f_2{}'(t)}{2}$ の性質があることに気づいた.

そこで，次の定理が成り立つことを証明すればよい.

> **(定理)** $f_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$, $f'_{n+1}(x)=(n+1)f_n(x)$,
> $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)dx=0$ ($n=1$, $2$, $3$, $\cdots\cdots$) として
> $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\cdots\cdots$, $f_{n+1}(x)$ を定めるとき $\displaystyle\int_x^{x+1}f_n(t)dt=x^n$ である.

**証明** まず $f_n(x)$ の一意性について述べる.

$g'_{n+1}(x)=(n+1)f(x)$ で

$\displaystyle\int_0^1 g_{n+1}(x)dx=0$ なる $g_{n+1}(x)$ があったとすれば，

$$g'_{n+1}(x)=(n+1)f_n(x)=f'_{n+1}(x)$$

であるから $g_{n+1}(x)-f_{n+1}(x)=C$ ($C$は定数)

$$\int_0^1\{g_{n+1}(x)-f_{n+1}(x)\}dx=\int_0^1 C\,dx$$

$$\int_0^1 g_{n+1}(x)dx-\int_0^1 f_{n+1}(x)dx=C$$

ゆえに $C=0$

よって $g_{n+1}(x)=f_{n+1}(x)$

$n=1$ のとき

$$\int_x^{x+1}f_1(t)dt=\int_x^{x+1}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right]_x^{x+1}=x$$

したがって $\displaystyle\int_x^{x+1}f_1(t)dt=x$

ゆえに　$n=1$ のとき成り立つ．

$n$ のとき成り立つと仮定する，$f_n(x)$ は $x$ の $n$ 次関数であるから $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n+1}a_{k-1}x^{n-k+1}$ と書ける(構成上 $f_n(x)$ は $x$ の有理整関数であるから明らかと考えた)．

$$\int_x^{x+1}f_n(t)dt$$
$$=\int_x^{x+1}\sum_{k=1}^{n+1}a_{k-1}t^{n-k+1}dt$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_{k-1}\int_x^{x+1}t^{n-k+1}dt$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_{k-1}\left[\frac{1}{n-k+2}t^{n-k+2}\right]_x^{x+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\left[t^{n-k+2}\right]_x^{x+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\{(x+1)^{n-k+2}-x^{n-k+2}\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\left\{\sum_{l=0}^{n-k+2}\binom{n-k+2}{l}x^{n-k+2-l}-x^{n-k+2}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\sum_{l=1}^{n-k+2}\binom{n-k+2}{l}x^{n-k+2-l}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n-k+2}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\binom{n-k+2}{l}x^{n-k+2-l} \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで $k=l=1$ のとき，①は

$\frac{a_0}{n+1}\binom{n+1}{1}x^n=a_0x^n$ となり，仮定よりこれを $x^n$ とおき $a_0=1$ …… ②

$k\neq1$ または $l\neq1$ のとき，

$l=n-k+2-s$ $(0\leqq s\leqq n-k+1)$ とおくと，

①から

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n-k+2}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\binom{n-k+2}{l}x^{n-k+2-l}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\binom{n-k+2}{n-k+2-s}x^s$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\cdot\frac{(n-k+2)!}{(n-k+2-s)!s!}x^s$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}(n-k+1)!}{(n-k+2-s)!s!}x^s$$
$$=\frac{1}{s!}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}(n-k+1)!}{(n-k+2-s)!}x^s \qquad \cdots\cdots ③$$

条件から

$$f'_{n+1}(x)=(n+1)f_n(x)=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}a_{k-1}x^{n-k+1}$$
$$\therefore\ f_{n+1}(x)=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}x^{n-k+2}+c$$

( $c$ は定数)

$$\int_0^1f_{n+1}(x)dx=\int_0^1\left\{(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}x^{n-k+2}+c\right\}dx$$
$$=\left[(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}x^{n-k+3}+cx\right]_0^1$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}+c=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

$n+1$ のとき

$$\int_x^{x+1}f_{n+1}(t)dt$$
$$=\int_x^{x+1}\left\{(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}t^{n-k+2}+c\right\}dt$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\int_x^{x+1}t^{n-k+2}dt+\int_x^{x+1}c\,dt$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{n-k+2}\left[\frac{1}{n-k+3}t^{n-k+3}\right]_x^{x+1}+\left[ct\right]_x^{x+1}$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\{(x+1)^{n-k+3}-x^{n-k+3}\}+c(x+1)-cx$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\times\left\{\sum_{l=0}^{n-k+3}\binom{n-k+3}{l}x^{n-k+3-l}-x^{n-k+3}\right\}+c$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\times\left\{\sum_{l=1}^{n-k+3}\binom{n-k+3}{l}x^{n-k+3-l}\right\}+c$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n-k+3}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\times\binom{n-k+3}{l}x^{n-k+3-l}+c \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$k=l=1$ のとき，⑤の $x^{n+1}$ の係数は

$$(n+1)\frac{a_0}{(n+1)(n+2)}\binom{n+2}{1}x^{n+1}=a_0x^{n+1}=x^{n+1}$$

(②から)

$l=n-k+3$ のとき，⑤は

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\binom{n-k+3}{n-k+3}x^0+c$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}+c=0 \text{ (④から)}$$

よって $\int_x^{x+1}f_{n+1}(t)dt$ の定数項は 0 となる．

$k\neq1$ または $l\neq1$ のとき，前と同様に

$l=n-k+2-s$ $(0\leqq s\leqq n-k+1)$ として，⑤から

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n-k+3}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\times\binom{n-k+3}{l}x^{n-k+3-l}+c$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\binom{n-k+3}{n-k+2-s}x^{s+1}+c$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}}{(n-k+2)(n-k+3)}\times\frac{(n-k+3)!}{(n-k+2-s)!(s+1)!}x^{s+1}+c$$

$$=\frac{(n+1)}{(s+1)!}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_{k-1}(n-k+1)!}{(n-k+2-s)!}x^{s+1}+c \qquad \cdots\cdots ⑥$$

ゆえに，③の $x^s$ の係数が 0 ならば⑥の $x^{s+1}$ の係数も 0 となる．

よって $\int_x^{x+1}f_{n+1}(t)dt=x^{n+1}$ となる．証明終わり．

すなわち $\int_x^{x+1}f_n(t)dt=x^n$ ならば

$\int_x^{x+1}f_{n+1}(t)dt=x^{n+1}$ がすべての自然数 $n$ について成り立つ．

定理から

$$\int_n^{n+1}f_k(t)dt=\int_1^{n+1}f_k(t)dt-\int_1^n f_k(t)dt=n^k$$

よって $\boldsymbol{\int_1^{n+1}f_k(t)dt=n^k+\int_1^n f_k(t)dt}$ $\cdots\cdots$ ⑦

これを用いると，$k=1$ のとき

$$\int_1^{n+1}f_1(t)dt=n^1+\int_1^n f_1(t)dt=n+\int_1^n\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=n+\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right]_1^n$$

$$=n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに $\int_1^{n+1}f_1(t)dt=1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

定理のやり方で $f_k(x)$ を決めていけば，以上のような簡単な定積分で従来の方法に比べて計算が大変らくにできる．

さて，$f_n(t)$ の一般形はどんな関数なのだろうかと考えた．

いろいろ調べた結果，$f_n(t)$ とよく似た性質をもっている関数にベルヌーイ多項式があることがわかった．そこで多分 $f_n(t)$ はベルヌーイ多項式にちがいないと考えその証明を行ってみた．

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kx^{n-k}$$

(ベルヌーイ多項式，$b_k$ はベルヌーイ数) 解析学概論(高木)から

$$B_1(x)=\binom{1}{0}b_0x+\binom{1}{1}b_1x^0=x-\frac{1}{2}=f_1(x)$$

$$\therefore\ B_1(x)=f_1(x) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$$B'_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{n}{k}b_kx^{n-k-1}$$

$$\frac{B'_n(x)}{n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)}{n}\cdot\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}b_kx^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)(n-k)}{k!}b_kx^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_kx^{n-k-1}=B_{n-1}(x)$$

$$\therefore\ \frac{B'_n(x)}{n}=B_{n-1}(x) \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$$(n+1)\int_0^1B_n(x)dx$$

$$=(n+1)\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kx^{n-k}dx$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k\int_0^1x^{n-k}dx$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k\left[\frac{1}{n-k+1}x^{n-k+1}\right]_0^1$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k\frac{1}{n-k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(n+1)\frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}b_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(n+1)\frac{1}{n-k+1}\cdot\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}b_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n-k+2)}{k!}b_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k=0$$

$$\therefore\ \int_0^1B_n(x)dx=0 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k=0$ は解析学概論(高木)から

⑧⑨⑩より $f_n(x)$ の一意性から $B_n(x)=f_n(x)$ であることがわかった．

そこで，$f_k(x)=B_k(x)$ から $\int_1^{n+1}f_k(x)dx$ を求めてみよう．

$$\int_1^{n+1}f_k(x)dx$$

$$=n^k+\int_1^n f_k(x)dx \quad (⑦から)$$

$$=n^k+\int_1^n B_k(x)dx=n^k+\int_1^n \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}b_i x^{k-i}dx$$

$$=n^k+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}b_i\int_1^n x^{k-i}dx$$

$$=n^k+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}b_i\left[\frac{1}{k-i+1}x^{k-i+1}\right]_1^n$$

$$=n^k+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}b_i\left(\frac{1}{k-i+1}n^{k-i+1}-\frac{1}{k-i+1}\right)$$

$$=n^k+\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k-i+1}\binom{k}{i}b_i n^{k-i+1}-\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k-i+1}\binom{k}{i}b_i$$

$$=n^k+\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}b_i n^{k+1-i}-\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}b_i$$

$$=n^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i n^{k+1-i}-\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i=0 \text{ より}\right)$$

$$=n^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i n^{k+1-i}$$

ゆえに

$$\int_1^{n+1} f_k(x)dx=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$$

$$=n^k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i n^{k+1-i}$$

ただし，$b_1$ 以外，奇数番号の $b_3$，$b_5$，$b_7$，…… はすべて0である．

(青森県立 八戸北高等学校)

*）この問題は

「新制 スタンダード 数学II」においても扱われています．(編集部注)