等身大の教材作り

石橋（いしばし）　信夫（のぶお）

1　プロローグ

私は埼玉県の公立高校３校(農業高校，進学校と言われている高校，ごく一般的な高校)で19年間数学を教えてきた．そこで強く感じる事は実社会で使われる数学的内容と数学の教科書との乖離（かいり）である．例えば昭和40年代の前半までは中学の教科書に「日歩と年利率の関係」が載っていた．現在，年利率については数Ａの「数列」の部分にあるだけである．３万６千件．これは1992年の個人破産の件数である．この数字も表に現れた数字であって，実際の破産予備軍はこの100倍に達するのではないかと言われている．車内広告などでよく見かけるこれらの言葉の意味をしっかりと理解していれば，違った人生が開けたかもしれない人が多数いるのではないか．男女共修となった家庭科の教科書にはせいぜいクレジットやカードに気をつけましょう程度の記述しかないので，具体的な数字をあげて示せるのは数学の授業しかない．そもそも教育基本法にある「人格の完成，自主的精神に充ちた心身ともに健康な国民」を育成するにはまず実社会で最低限必要とされる知識の伝達が大切である．情報化社会と言われながら雑多な情報に振り回され，しっかりとした個の確立ができず，またその集団が社会不安の増大を促す．

このことを少しでもくい止める工夫がもっと学校現場でも必要とされるのではないか．

ここで数学の教科書の内容に話を戻す．数学の中だけで考えても本質が見えてこない場合もあるし，他教科ならば気楽に意見を述べられるので国語Ｉの教科書の内容について見てみる．色々な教科書があるが，随筆，評論，小説，詩，短歌の現代文と古文，漢文に分けられ，古文漢文を合わせるとページの半分を越える．作品の作者も錚々たるメンバーで，確かに有名女優のエッセイや人気作家のＳＦも載せてあったりもするが，密度の濃い内容が散りばめられている．力のある生徒の教養として，また将来文学部に進む生徒にとっては充実した内容であるが，マンガしか読まない学力も中以下の生徒にとってはどうであろうか．この内容を精選したり，水で薄めたり，情熱を持って教えたりといった物理的変化を加えて教えるのではなく，新聞をしっかりと読めるとか，事実を正確に人に伝えられるとか，手紙などの実用文を書けるとか，文章を読むのが楽しいといった部分に力点を置き，違った角度からの復習を含めた，いわば化学的変化を加えた教材作りが必要とされるのではないか．勿論この事がそっくり数学についても言えると思えるのである．

そこで教材作りのポイントを３つあげると

①実生活で知らないと損をする内容．

具体的には年利率，日歩や何割引といった事である．百分率や歩合について調べてみると小学５年の教科書に３ページ程度載せてあるだけで割引そのものはどこにも載っていないのである．また統計的な見方も知らないと相手の宣伝に惑わされるので載せる価値がある．

②身近な物や事柄における数学的内容の説明や素朴な疑問への解答．

具体的にはオーディオ機器，自動車，ダイヤモンド，テレビなどについてや，なぜ45度で投げれば一番遠くへ飛ぶかなどである．理工系離れと言われる昨今，積極的に興味関心を促す事が必要とされる．

③帰納と演繹，分析と統合といった自然科学の根幹をなす考え方．

具体的には因数分解の効用や釣り合いから見た三角形，正四面体の重心，食塩水の問題など．

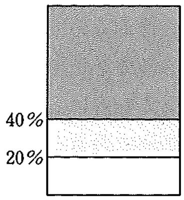
私の主張したい事は教科書の内容を変えることではなく，この教材の様な副読本を多くの高校生に持

たせ，期末テスト後の授業や章の導入の際あるいは数学の「その他の科目」の中にある「数学基礎」や「楽しい数学」の時間に活用してはどうかという事である．私自身も授業の合間に話したりしている．以下に具体的なテーマ例を列記する．

2　具体的なテーマ例

紙面の都合でこれは基本的な構想であって細部ではない．(1)から(12)までの例があり①が説明部分で，②が設問部分である．教科書のどの部分と関係するかも示す．

(1)　サラリーマン金融の怖さ（複利計算と日歩）「数学A―数列」



①現在の出資と利息制限法では年利20％までは合法，40％以上は刑事罰が適用される．20％～40％はいわばグレーゾーンであり，大手サラ金の年利率は30％強，銀行系カードでも30％弱である．

また注意すべき返済方法としては結局いくら負債があるかわからなくなるリボルビング方式と返済していっても元金が一定のアドオン方式がある．

②ここで20万円を年利率35％で借り10年間そのままにしておいたとき，返済すべき金額を求めさせる．答は約201万円でそのグラフをかかせる事により指数の怖さを理解させる．また日歩の説明を行い日歩10銭は年利率に直してどれくらいか計算させる．給料を毎年一定の割合で増加させ10年で2倍になる様にするとき，割合をどれくらいに設定すればよいか．電卓を活用し答を求めさせる．

(2)　住宅と自動車ローンについて（元利均等返済方式）「数A―数列の和」，「数A―計算とコンピュータ」

①住宅ローンや自動車ローンはサラ金に比べ年利率は高くない．しかし年数が長くなるので1％の差で返済総額が大きく変わる．返済方法として元利均等方式が一般的で，この方式は毎回の返済金額を一定にするため最初は利息分が多く，年数がたつごとに少しずつ元金部分が増えていく．積み立て貯金の逆と思えばよく，数学的には線形一階差分方程式を解くことになる．債務をA円，返済年数をn年，年利率をr，毎年返済する金額をa円とすると

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\quad \text{となる．}$$

この式で返済総額が元金の2倍となる年利率と年数の関係を式で表すと

$$\frac{r(1+r)^n n}{(1+r)^n-1}=2$$

となる．BASICで簡単なプログラムを作り返済総額が元金の1.5倍と2倍となる年数と利率の関係を調べると次の様な表になる．

年利率	1.5倍	2.0倍
0.03	28年	52年
0.05	15年	31年
0.07	12年	22年
0.09	8年	18年

②この表から年利率5％で30年借りると返済総額は元金の約何倍となるか．

(3)　割り引き率と比の値（大小比較）「数学A―数と式」

①2つの物を比べる場合，差をとる方法と比で比べる方法とがある．差をとる方法は分かりやすいが比の方は理解しにくい様である．しかし，例えば「鉄と綿のどちらが重いか」といったとき，どうしても比で比べる必要がある．比で比べる場合は何かの値を一定にするという発想が基本にあり，先ほどの鉄と綿では体積を一定にする訳である．数学的には和や差が意味をもつ量を外延量，ある種の比の値でその物の性質を表す量を内包量という．60度のお湯と80度のお湯を合わせても140度とならないのは温度が内包量だからである．この場合，熱容量（温度×重さ）は外延量だから和が意味をもつ．10000円の商品1000円引きと15000円の商品1200円引きを比べる場合，当然割り引き率といった比の値で比べる必要性を示す．

②水が凍るとき，その体積は$\frac{1}{11}$増える．では氷が水になるとき，その体積はいくら減るかといった全体をどう捉えるかの問題を入れる．また1ドル100円が80円になったとき1万円で輸出されていた品物の値段はいくらになるかといった時事的な問題も入れる．

(4) ダイヤモンドの値段(2乗に比例)「数学Ｉ－2次関数」

①一般にダイヤモンドの評価は4つのCで決まると言われている．カラット(重さ)，カット(研磨)，カラー(色)，クラリティー(透明度)．ここで1カラットとは200 mgで，マメ科の木の実の重さが語源らしい．またダイヤモンドの値段は大きな原石が手に入らない事もあり，大雑把にいって重さの2乗に比例すると言われている．

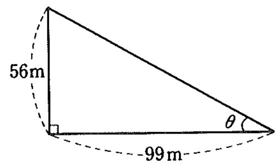
ついでに球の体積は $V=\frac{4\pi r^3}{3}$ で表面積は $S=4\pi r^2$ である．動物の体を球とすると寒い所に棲む動物は表面から逃げていく温度の事だけを考えれば体が大きい方が都合が良い事がわかる．シベリアに棲む小動物のトガリネズミ(体長5 cm)は体温を維持するため毎日眠らずに自分と同じ重さの餌を食べ続ける必要があるという．

②自動車の衝突のエネルギーは速度の2乗に比例する．時速50 kmで壁にぶつかったときのエネルギーは4階のビルから落ちるときのエネルギーに等しいという．では時速100 kmでぶつかったときのエネルギーは何階のビルから落ちるのと同じか．ここで位置エネルギーは高さに比例する．

(5) 四駆はジャンプ台を登れるか(三角比)「数Ｉ－三角比」

①一昔前，自動車やバイクのカタログには登坂能力という項目があり，例えば $\tan\theta=0.5$ といった様に表されていた．角度で表せば簡単の様だがそうではなかった．また一時期テレビコマーシャルで，ジャンプ台を登っていく四駆があったがジャンプ台の角度はどのくらいなのか．三角比の定義と表とから問題を解いていく．

②ラージヒル(90 m級)のジャンプ台の規格は右の図の通りである(実際は踏み切る部分は緩くなっている)．いま，登坂能力が $\tan\theta=0.55$ の四駆はこれを登れるだろうか．



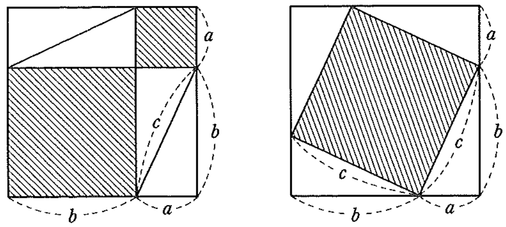
また自分の歩幅が何センチか分かっていて，直角二等辺三角形の定規を手にしているとき，垂直に立っている木の高さを測るにはどうすればよいか．

(6) テレビの大きさと三平方の定理「数Ｉ－三角比」

①テレビの大きさは14インチとか20インチといった具合に表される．この長さはテレビの縦横の長さではなく対角線の長さである．ついでに1インチとは2.54センチでこの単位はイギリス人の親指の幅の平均から来たものだと言われている．日本の1寸(3.03センチ)も同様の単位らしい．また昔の大工さんも対角線の長さを求めるのに苦労したらしく，「金尺」の裏には表の目盛の1.41倍の目盛が付いていて45度の角度の板の長さをこれで求めたとか．

「三平方の定理」の証明方法は200以上あると言われ，例えばリンカーンから4代あとのアメリカ大統領ガーフィールドも新しい証明法を考えだした人として知られている．

②下の図を見て三平方の定理を確認する事．



また1辺の長さが1メートルの立方体の中に1.7メートルの棒が入るかどうか．

(7) なぜ45°の角度で投げれば一番遠くへ飛ぶか「数Ｉ－2次関数，三角比」，「数Ａ－式と証明」

①サッカーでも野球でも空気抵抗がなければ45°の角度で蹴ったり，投げたりした場合が一番遠くへ飛ぶ事はなんとなく知られているが，どうしてか(実際は空気抵抗があるので35°から40°の間の角度が最も飛ぶ様である)．証明方法は相加・相乗平均の関係を用いる方法と三角関数を用いる方法があるがここでは紙面の都合で省略する．

余談として，東京ドームにおいてホームランの打ち方が3つある．勿論外野フェンスを越える事，ランニングホームラン，そして外野フェア地域懸垂物(天井の照明器具等)に当てる事である．天井までは約60メートルあり，実際平成2年に近鉄のブライアント選手がこれでホームランを記録している．

②初速度14 m/s，角度45°で投げ上げたとき，重力加速度を $g=10\ \mathrm{m/s^2}$，$\sqrt{2}=1.4$ として，最高点の

高さと時刻，再び地面に落ちてきた地点までの距離を求めよ．

(8) オーディオ機器とデシベル「数II―対数関数」

①音の高さは1秒間の振動数によって決まる．1秒間の振動数はHz(ヘルツ)という単位で表される．例えば50 Hzならば1秒間に50回振動するという意味である．電流についてもHzは使われていて，日本では静岡県の富士川を境に東は50 Hz，西は60 Hzで電気製品を使用する際に注意を要する．元の状態から振動数が2倍になったとき1オクターブ高くなったという．式で表すと次の様に表せる．

$$\log_2(f_2/f_1),\ f_2,\ f_1 \text{ は振動数}$$

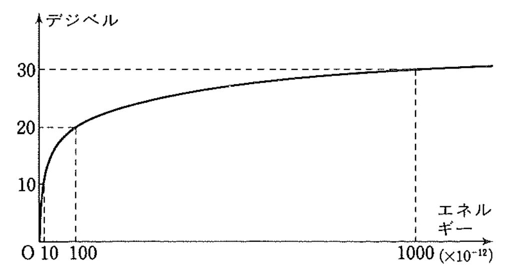
人間の耳が聞き取れる振動数の範囲は20 Hzから20000 Hzである．

音の強さは耳の鼓膜を刺激するエネルギー量で決まる．そのエネルギーをI (w/m^2)で表す．単純に言うと同じ空気中を同じ速度で進む音の強さは振幅の2乗と振動数の2乗に比例する．ここで音の強さを相対的に表す単位としてデシベルがある．これは10^{-12} (w/m^2)の音の強さを0デシベルとして次の様な対数関数で表される．

$$L\,(\text{デシベル}) = 10\log_{10}(I/10^{-12})$$

この対数関数は10を基準としているので基準よりエネルギーが100倍，1000倍だとそれぞれ20，30デシベルとなる．この感覚は，例えば恋人にプレゼントをするとき100円の物を貰ったときの喜びを基準にすると1000円，10000円の物を貰ったときの喜びは10倍，100倍ではなくせいぜい2倍，3倍といった程度の感覚と似ている．

実際人間の耳の感覚機能も比例ではなく対数的にできていて，より広範囲の音を巧く聞き取れる訳である．音の強さとデシベルのグラフは下の図の様になる．



対数関数で表される身近な例として，酸アルカリのpH，星の明るさの等級，地震のマグニチュードなどがある．

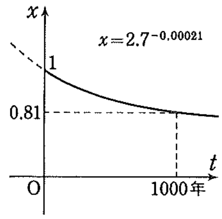
②3オクターブ違う2つの音の振動数の比はいくらか．

(9) 言葉の変遷「数II―指数関数」

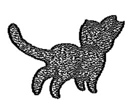
①日常使われている言葉も時代とともに変わっていく．例えば，古語で「うつくし」は現代語では「かわいい」であるし古語の「こおろぎ」と「きりぎりす」は現在と逆だったとか．

1950年ごろアメリカの言語学者スォーディシュは言語年代学という学問を作り上げた．そのなかで彼は各国の基本語(約200語)の時代とともに変わっていく割合を調べた．すると面白いことに英語，フランス語，ドイツ語，中国語など言葉によらず1000年間で約19％の言葉が別の言葉に変わっていく．初めは大きく減るが，だんだんと一定値に近づいていく．数学的に表現すると言葉の変化の速度は変化しないで残っている言葉の量に比例する．これを微分方程式で表すとxは言葉の量，tは年数，kは定数$\dfrac{dx}{dt} = -kx$となり，これを解くと指数関数となる．

このグラフは右の様になる．

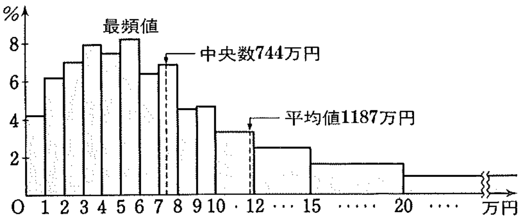


これに似た現象は日常の生活の中に，よく見られる．例えば，物体が冷却される速度は物体の温度と気温の差に比例する，砂糖が水に溶ける速度は溶けずに残っている量に比例する，などである．放射性物質が崩壊する速度もまた残っている量に比例し，特に初めの量の半分に要する時間を半減期という．



(10) 平均と偏差値と視聴率「数C－統計処理」

①1992 年の全国 1 世帯あたりの平均貯蓄額の平均は 1187 万円であった．しかしこの分布は下の図の様に左右対称ではない．ここで代表値として最頻値(モード)や中央値(メジアン)が意味をもってくる．



貯蓄額階級別世帯分布（勤労世帯　92年）
資料：総務庁「貯蓄動向調査」

偏差値の求め方に必要な値として標準偏差がある．これは$\sqrt{(各受験生の点数－平均)^2 の合計 / 受験生数}$であり，得点のちらばりを表す数である．つまりこの値が大きいとちらばりが大きい．

偏差値は次の式で求められる．

{(得点－平均) / 標準偏差}×10＋50

例えばA君が国語と数学のテストを受け結果は下の表の様になった．これを見ると数学の方が平均点との差が大きいのでよさそうであるが，標準偏差も大きい．そこで偏差値を計算してみると

	得　点	平均点	標準偏差	偏 差 値
国語	75	60	10	$10\times\frac{75-60}{10}+50=65$
数学	80	62	14	$10\times\frac{80-62}{14}+50=63$

よって国語の方がよかったと言える．

統計的考え方の基本は部分から全体を予測する事にある．ここで当然誤差も出てくるし，部分の選び方も問題となる．いま，300 世帯の視聴率が 5％とし，これで全国の視聴率を統計的に推測すると 5±2.5％，10％だと 10±3.5％である．これを見ると 1％で一喜一憂する事はあまり意味のないことがわかる．またその部分の選び方(サンプリング)にも注意する必要があり，一般に層別抽出法(予め，男女とか年齢構成で分けておいた層から抽出)と集落抽出法(年齢構成等平均的な町の人の層から抽出)の 2 つがある．またアンケートの質問の仕方とか言葉の定義(例えば若者といってもその年齢を何歳としているかなど)にも注意する必要がある．

②「飛行機は 1 億キロ飛んで 1 人死亡するが，自動車は 5 千万キロ走って 1 人死亡する．よって飛行機の方が安全である」といった宣伝があったらしいがこれは 1 人が死亡する距離を比べている．今，飛行機の平均時速を 500 キロ，自動車を 25 キロとして 1 人が死亡する時間で比べるとどんなことが言えるか．

(11) 困難を分割せよ「数A－数と式」，「数B－ベクトル」

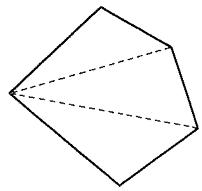
①「困難を分割せよ」とは 16 世紀の数学者，哲学者であるデカルトの言葉である．数学ではこの方法を用いるとうまく見えてくる場合が多い．例を 4 つ程あげる．

2 次方程式の解法．これも 2 つの簡単な 1 次式に分解することにより解が求められる．

$x^2-5x+6=0$　　$(x-2)(x-3)=0$

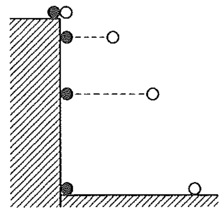
(2 次式)＝0　　(1 次式)(1 次式)＝0

多角形の内角の和もいくつかの三角形に分解することによって求められる．



五角形についてみると五角形の内角の和は 3 つの三角形に分けられるから

180°×3＝540°



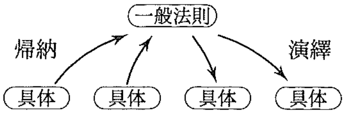
机の上から水平方向に投げだされた物体と机の端からそのまま落下した物体がある．この 2 つの物体が床につくまでの時間に違いがあるかどうかは，水平方向と鉛直方向は独立している事からすぐに答が出せる．

数ベクトルの和も同様である．昔，自殺の名所として知られる伊豆大島の三原山の火口に次の様な立て札があったとか．「一寸待て．もう一度考え直してみよ」これを拡大解釈するならば困難を分割してみる事が人の命にもかかわってくるのではないか．

②ロッテの伊良部投手が 1.8 m の高さから水平に時速 150 km で投げたボールとあなたが 1.8 m の高さからそのまま落としたボールとでは地面につく時間に違いがあるだろうか．勿論空気抵抗は無視する．

⑿　万有引力の法則「帰納と演繹」

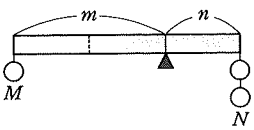
①具体から一般へ(帰納)と一般から具体へ(演繹)は自然科学の基本的な方法である。



この典型的例が万有引力の法則の発見であろう。すなわち，りんごが木から落ちる事によって法則を発見する事は帰納である。ニュートンの死後約50年頃，天王星が発見された。しかし，この星の軌道は法則で予測される軌道と少しずれていた。法則を優先させれば，天王星の外側に未知の惑星があると仮定すれば計算が合う。はたして計算された場所に望遠鏡を向けると驚くことにそこに未知の惑星，海王星があったのである。この事は演繹である。

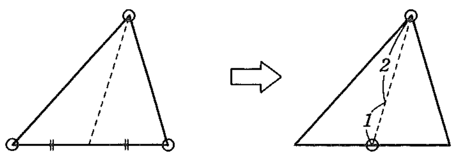
関数が苦手という生徒が多い。理由は捕らえ所がないからだという。これも帰納と演繹の考えをしっかりと意識させれば少しは違ってくるのではないか。例えば簡単な例として1次関数で考える。2点(0, 1), (1, 3)を通る直線の方程式を求めることが帰納であり，この直線上のある1点例えば $x=2$ のときの y の値を求めることが演繹なのである。

ここで簡単な帰納と演繹の例をやってみる。力の釣り合いについてまず法則を求めてみる。次の様な2つの重りがつりあう点は逆比に内分する点であることをまず法則として認識させる。

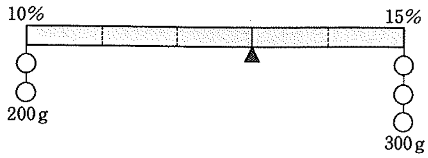


$$Mm=Nn$$

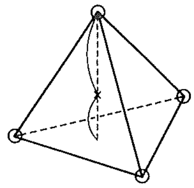
これを使って三角形の重心の位置を求めてみる。



また食塩水の問題で10％の食塩水200gと15％の食塩水300gを混ぜたら何％の食塩水になるか。これも釣り合いの法則でできる。



②問題として正四面体の重心は頂点から底面に下ろした垂線をどんな比に内分する点か。



3　エピローグ

拙い文章を読み直してみると，時節がら世紀末的社会不安に対して力んでみたり，文章がぎこちなかったり，説明がくどかったり，逆に唐突だったりといった具合で恥ずかしいかぎりである。

また，等身大とはいっても対応する2つの量の関係を調べる際にどうしても色々な関数の知識が必要とされる。特に指数対数関数は表記からして難しいが，グラフの形から対応の大雑把な関係を読み取れればそれでいいと思っている。また分からないからこそ興味を引くといった部分もあっていいのではないか。

色々な視点で教材を工夫している先生方は全国にたくさんいらっしゃるがそれが個人レベルではなく方向性を持ってまとまっていければと思い，1つの参考例として紙面を埋めた次第である。

(埼玉県立　蓮田高等学校)