第6回　日本数学コンクールを終えて

四方（しかた）　義啓（よしひろ）

1990年に数学コンクールを始めてから，何度も「これって本当に数学のコンクールかい」と聞かれました．「本当に数学だったらちゃんとした正解が１つだけで，他はみんなペケでなければいけないだろう」というのがその理由です．確かにそう言われてみるとそうかもしれません．このコンクールの問題には正解がないことが多い上に，正解にしてもたった１つとはかぎらないのです．ですが，もし数学という学問・学科が単なる暗記物でなく，本当に「推理」する力や本当に「創造」する力を養うための学問なのだとしたら，たった１つの正解しかないという方が，むしろおかしいようにも思うのです．言ってみれば，本物の「推理」や本物の「創造」なんてものは１つの賭けなのですから……

更に，これからの日本には，過去からの積み重ね，単なる暗記では全く対処できないような新しい事態に直面して，それを何とか解決しなければいけないなどという時が来るに違いありません．こんな時こそ本当に「推理」する力や本当に「創造」する力が必要になるのではないでしょうか．我々はそれに備えておきたいのです．

「もしも」ですが，そういう事態に直面したとしたら，我々は，まず，いくつもの答の候補を作ってみることになるだろうと思います．そして，その中から「できるだけうまくいく」ようにどれか１つを取って実際に試してみるに違いありません．千人が千回くらい試せば，ちょうどニュートンやエジソンがそうだったように，そのうちどれか１つが当たって未来を開いていくのではないかと思うのです．

この数学コンクール，そして多分，本当の数学が求めているのはその「試してみる」という勇気や「目標に向かう努力」ではないかと思います．当たる当たらないは時の運，評価されればいいけれど，評価されなくてもそれでいいのではないでしょうか．人間の歴史，そして，何十年も続く個人の人生において大事なのは，たった１日で終わる数学コンクールで評価されたかどうかというそれだけではなく，「いろいろ考えて」「試してみる」という勇気や努力であり，それを「楽しんでやろう」という気概だと思うのです．

そういう勇気や努力，そして気概を養っていただくために，問題を作る方も実は必死になっています．単なる数学の難問を作っているのではないのです．数学を「楽しめる」，ように実験や写真を取り入れ，(問題文が長くなるのもかまわず) できるだけ日常的な所に題材を取ってはいますが，その裏では，数学を「試してみられる」ように学会の最先端に近いところも狙っているのです．こうすると，当然，数学コンクールは単なる高校生のお遊びではなくなってしまって，当然，単純な正解も消えてなくなるのです．信じていただけないかも知れませんが，コンクールの問題の中にはそれがうまく解ければ学会賞ものと言われる問題や，その名前を冠したシンポジウムが開かれたなどという問題が堂々と混じっているのです．

私どもは，コンクールをたった１日だけのイベントに終わらせたくはないのです．コンクールは１つのきっかけにしか過ぎないのです．これらの「正解のない問題」と１日格闘することによって，「こんなにも多くの不思議に取り囲まれて生きてるんだ」と驚き，そして，多くの参加者の心の中に眠っている，「じゃ，その謎をもっと解明してやろう，もっと何とかしてやろう」という情熱の火が燃え上がることを願っているのです．この新鮮な驚きや情熱こそが，未来を生きる人々にとって一番重要なものになるのではないのでしょうか．その時，きっと「数学って，こんなに凄いものだったのか」と思い出してもらえることをひそかに期待はしているのですが……

では今年度の問題の１つ１つを見て行きましょう：

問題１は，自動制御・最適制御では有名な「殺人ゲーム」の問題をモジったものです．これは「急には曲がれないがスピードは速い車が，自由に曲がれ

るが速度の遅い人間さまを追っかけるとき，人間はどう逃げればいいか」という問題で，今までのところは厳密解は得られておらず，多分コンピュータ解しかないはずです．本来はこれに制限条件をつけて，きれいな解を得られるように改造して，コンクールに出したかったのですが，うまくいかず，いわば苦し紛れに，『「自動車の台数」＝「殺し屋猫の数」を求めよ』という形に変更しました．その割りには，殺し屋猫の顔ばかりではなしに問題自身も好評だったようでした．鼠が必ず動いたり，その逆に必ずしも動かなくてもよかったりとか，猫が一斉に動けたり動けなかったりするなど，いろいろな場合を問題にしたのは，このような事情によるものです．

いずれの場合にしても，最低限必要な殺し屋猫の数は，殺し屋猫が動くことができる全ての場所を黒く塗りつぶしてできる(変形)市松模様を考えれば分かります．例えば，鼠が必ずしも動かなくてもいい場合などは，猫が動ける場所は盤上全てでなくてはならないので，4匹が必要です．これで得られた必要条件が，十分であることを示すためには，多少とも詰め将棋的・コンピュータ工学的(?)な考え方をしなければならないでしょう．例えば，猫を斜めに並べておいて，鼠に対する必殺の位置を求め，実際に鼠を追いかけさせて，必殺の位置に追い込めることを示さねばならないのです．必要条件の部分はよくできながらも，十分の部分が甘い解答が意外に多いようでした．

問題2は専門家の間では「アバランシェ(雪崩れ)」問題，「サンドパイル」問題などとして知られている最先端の問題ですが，なかなかいい解答がありました．感激しています．実は，実験装置が多少怪しげだった上に，本来なら必要だった虫メガネも用意できていませんでしたが，「よく見えていたな」と思うような解答がかなりの数に上ったのです．

CDケースで3次元の現象を2次元に引き戻して考えるという手法は，このコンクールでは既におなじみになったようですが，実際現象の数学的・数理的解明には意外に有効です．実際，この問題でも，食卓塩や鳥のえさなどという常識的な範囲での一様な粒子なら，ほぼ一定の「アバランシェ」角35-40度で直線状に崩れていくことに多くの人が気づいていました．

これから，「アバランシェ」を決めるのは，摩擦やつり合いなどの物理的特性より，もっと幾何学的な何かだろうということが導かれ，微小粒子の幾何学の問題を解くことによって「アバランシェ」構造の説明ができると考えられるのです．

問題3もいわゆる正解のない問題です．ただ，ひそかにパソコン少年のカモにされることを期待して(?)いたのですが，その方向からのドキッとするような解答は見当たりませんでした．最近のパソコン少年の関心は，そんなところには全くないようです．

昔の手作り8ビットマイコンは2の8乗＝256文字，すなわち，アルファベットと仮名文字だけしか取り扱えず，これでは日本語は全く処理できませんでした．多くの人が指摘していましたが，日本語の情報処理は，常用漢字約3000字と，それに1つか2つの漢字または送り仮名をつけて得られる3万から4万語の熟語とを中心として行われます．それを取り扱うには，2の16乗＝約6万文字であるところから，最低16ビットが必要なのです．更に日本語の情報処理は，16ビット的な漢字・熟語の部分により大きい重さを持たせ，8ビット的なひらがなの部分にはそれをより正確に読ませるという比較的軽い役割を担わせていると考えられます．

仮名を抜いて残った漢字だけの文を読ませるという実験は，これを証明しようとしたものです．日本人はまず粗っぽい一次情報を漢字・熟語から得て，より詳しい副次的な情報を仮名から得るのではないのでしょうか．また，被験者の解読速度が，大きくばらつくことは，日本語の情報処理速度は訓練次第で，うまくやれば非常に大きくできるということを示しているのではないのでしょうか．

なお，ひらがな文に区切りを入れる入れないの読み取り比較実験は，情報の区切り記号が処理速度を上げる上で非常に重要であるということを示そうとしたものです．もちろん，情報をできるだけコンパクトにしようと思ったら区切り記号などは邪魔になるだけです．そこで，情報を正確に読ませるという働きの一方で，区切り記号を入れるという役割を，送り仮名をはじめとするひらがな群にもたせたものだとすると日本語の情報処理の凄さが見えてくるような気がしています．

問題4・5は「高校数学の範囲で，かなり実用的なことができるんだ」という「高校数学ハイライト」にしようと思っていました．

問題4では，三角形や四角形などの形の決まり方の違いを聞いています．多くの答案で指摘されていたのは，「三角形なら，3辺を与えるとその形が決まってしまうが，四角形以上になるとそうはいかない」という点でした．これはこれで間違いではないのでしょうが，『だから「すじかい」を入れて三角にすると四角より丈夫だ』，では十分ではないような気がします．例えば，長方形に斜めに柱を渡したらどうでしょう，形が決まらないのは真ん中に渡す柱が辺に平行な場合だけで，そうでない場合は形が決まってしまうのです．

この問題は「数学的」にいうなら，束縛条件と自由度の数の問題になっています．平面三角形の場合なら，2点からの距離が束縛条件で，これは2個．一方，平面を動き回る点の自由度はX座標とY座標の2個，したがって $2-2=0$ だから，ちょうど1点が決まるという訳です．この仕掛けがユークリッドの幾何学（の合同条件）を作ったのでしょう．このように順序だてて考えると，意外に数学の裏が見えてくるのではと思っています．

更に，こうして形の決まりかたが見えてくると，「いろいろな形」があり得ることも見えてきて「そのような形のうちで，一番強くて安いのはどれだろう」という考え方も出てこないかなあと思っていました．これは，平方式の微分でできるのでやはり高校数学の範囲に近いのです．実際に，このような考え方で，耐震住宅が設計されているそうです．

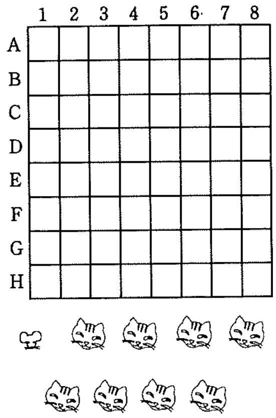
問題5については，厳密さには多少目をつぶって欲しいのですが，まず，直線ABをとって，割り箸を1点Cで折って片方の端を点Aに，もう一方を点Bにおくことにしてみます．点Cをいろいろに変えて，この直線ABと割り箸とが作る三角形の面積を最大にしてみてください．「それは，AC=BC なる二等辺三角形のときである」という厳密な答がでるでしょう．次に，「2か所で折る場合は？」を考えてみてください．これについては，ある図形が最大面積を与えるなら点A，Bを入れ替えて，それを対称にひっくりかえしても最大ということまではすぐわかります．したがって，もし最大を与える図形が1つしかないのなら（ここが厳密でない），それは対称図形に限るわけです．この2つを組み合わせると，正多角形が，周囲が一定の多角形の中では最大面積を与えることがいえます．なぜなら，前半から「面積最大の多角形の辺の長さは等しい」が分かり，また，後半から「その隣り合わせの角度は等しい」が得られて，「面積最大は正多角形」がでるからです．屋根のふき方についても同じように考えることができます．

（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

第6回　日本数学コンクール　問題文 (体裁は実際のものと異なります)

問題　1

8×8のマス目を持つ盤面を逃げ回る一匹のネズミを何匹かの殺し屋猫を雇ってきて捕まえるというゲームを考えてみてください．ボロ博士は貧乏ですから，雇うネコはなるべく少なくするというのが条件です．



このゲームのルールは次のようになっています：

1　ネコ (組) ⟶ ネズミ ⟶ ネコ (組) ⟶ ネズミ ⟶ の順に動きます

2　ネズミは上下右左の隣り合ったマスに動けます

3　ネコ組のどのネコも上下右左へ一マス飛び越して動けます．全てのネコが勝手に一マスジャンプできます

4　ネコもネズミも盤面の外には飛び出してはならない

5　ネコとネズミが同じマスに入ったときにネコがネズミを捕まえたといいます

そこで，下のような各場合にネコ組のネコは何匹必要かを考えてみてください：

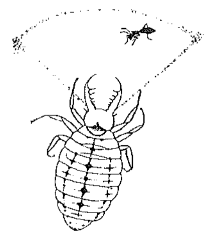
ア　ネズミは自分の番がきても動かなくてもよいというルールを付け加える場合

イ　ネズミは自分の番がくると必ず動かなくてはならないというルールを付け加える場合

ここまでが易しいという人のために
ルール3を「ネコ組のネコはネコ組の番には一匹だけしかジャンプできない」と変更する，
ただし，ネズミは自分の番がくると必ず動かなくてはならないということにしておく，ならどうでしょうか．

問題　2

アリジゴクは乾いた砂地に見事な「すりばち」型の穴を掘って，その底でアリを待ち受け，「すりばち」に落ちてくるアリを食べてしまいます．　問題は，物差しなど何の測定器具も持っていないアリジゴクがどうやって縁がまっすぐできれいな「すりばち」型の穴を掘っているのかということです．



おなじみのボロ博士は『誰だって穴さえ掘ればいやでも「すりばち型」になるんだ』と主張していますがほんとうでしょうか？　ボロ博士の言うとおりに砂と底に穴をあけた透明のプラスチックケースを用意しておきますので試してみてください．ボロ博士は正しいのでしょうか．さて，すりばち型に対する，君の理論ができたとして，それによって，二匹のアリジゴクがとなりどおしに穴を作ったとき，二つの穴の縁がどうなるかを推理してみてくれませんか？

問題　3

どんな数字でもゼロから九までの十個の数を使って表されます．一から九まで数のあらゆる組み合わせは九九・八十一個ですから，それを覚えておけばどんなかけ算でもできるのです．それなら，ゼロから三までの四つで表したら，またゼロと一だけの二つで表したら……と思いませんか．九九の表はうんと簡単になって，せいせいするとは思いませんか．ただその代わりに，一つの数字を表すのに必要な桁数がどんどん増えてしまうのは不便ですが，ちょうどいいところがあるはずですね．実はこの方向で成功したのがコンピュータさんが使う二進法だったのです．

わがボロ博士は，日本語もこれとおなじことで，「ひら仮名」と漢字を混ぜてちょうどいいところになっていると言っています．このボロ博士の主張に従って，実験してみた結果が「資料」にある数字です．これは「数学コンクール」を紹介した新聞記事を，

1「ひら仮名」だけにする

2「ひら仮名」をすっかり抜いて漢字だけにする

3「ひら仮名」だけにするが単語と単語の間はスペースを空ける（英語風に書く・分かち書き）
として，学生さんに読んでもらい，どれくらいの時間がかかったかを記録したものです．この実験から，ボロ博士の言うことが正しいといえますか，また日本語は数学的にどういう構造を持っているのでしょうね．

文章１－１…仮名文わかちなし

ゆうしゅうしゃをちゅうしんによくとしなつには「ふぉろーあっぷせみなー」がひらかれ、すうがくずきのなかまとさらにふかいぎろんをするばがもうけられている。さんかしかくはこうこうせいまたはこうこうそうとうねんれいいかのひと。いっぱんのさんかもできるが、ひょうしょうのたいしょうとはならない。ごぜんじゅうじからごごよじさんじゅっぷんまで。とうじつはさんかひにせんえんとべんとうをじさんする。

文章１－２…文章１－１を平文にした文章

優秀者を中心に翌年夏には「フォローアップセミナー」が開かれ、数学好きの仲間とさらに深い議論をする場が設けられている。参加資格は高校生または高校相当年齢以下の人。一般の参加もできるが、表彰の対象とはならない。午前十時から午後四時三十分まで。当日は参加費二千円と弁当を持参する。

文章２－１…漢字のみの文

数学好中学高校生集受験数学独創的数学思考競第六回日本数学コンクール八月十二日名古屋市千種区名古屋大情報文化学部校舎開。

文章２－２…文章２－１を平文にした文章

数学好きな中学、高校生集まれ—受験数学にとらわれない独創的な数学思考を競う「第六回日本数学コンクール」は八月十二日、名古屋市千種区の名古屋大情報文化学部校舎で開かれる。

文章３－１…仮名文わかちあり

ぼろきょうじゅらが　ねりに　ねった　ゆにーくな　なんもん、きもん　ごもんが　だされ、さんかしゃには　ろくじかんの　もちじかんが　あたえられる。かこには「ねんどを　へいこうな　いたの　あいだに　はさんで　まわすと　まるくなるのは　なぜか」といった　もんだいが　でている。のーと、さんこうしょるいは　もちろん、じゅーすなども　もちこむ　ことが　でき、まいとし、ごひゃくにん　いじょうの　さんかしゃが　ある。

文章３－２…文章３－１を平文にした文章

ボロ教授らが練りに練ったユニークな難問、奇問五問が出され、参加者には六時間の持ち時間が与えられる。過去には「粘土を平行な板の間にはさんで回すと丸くなるのはなぜか」といった問題が出ている。ノート、参考書類はもちろん、ジュースなども持ち込むことができ、毎年、五百人以上の参加者がある。

文章４……平文

コンクールは、本年度新設された名古屋大学多元数理科学研究科で研究科長を務めるボロ教授らが企画。コンクールの「卒業生」から、今年同研究科に入った学生もおり、ボロ教授は、「研究科がひなを育てる場なら、コンクールは卵を生む場所。世界の数学に新たな問題を提起し、新しい流れを作る人材を見つけたい」と、六年目を迎えたコンクールにさらなる期待を寄せている。

グループA　異種の文章１から文章４を１つずつ読んだグループのデータ

	文章１－１	文章２－１	文章３－１	文章４
A君	35.03	47.46	28.78	31.25
B君	41.87	44.35	25.48	33.97
C君	32.90	37.99	23.62	26.94
D君	33.34	27.66	21.84	25.05
E君	36.46	24.84	27.62	31.59
F君	43.59	42.15	36.96	40.74
G君	54.10	122.92	35.03	32.00
H君	57.90	64.40	29.93	30.37
I君	37.35	52.55	27.06	36.15
J君	34.40	30.16	24.47	26.04
K君	61.22	97.61	36.91	33.03
L君	42.92	46.61	41.90	44.09
平均	42.59	53.23	29.97	32.60

グループB　平文の文章のみを読んだグループのデータ

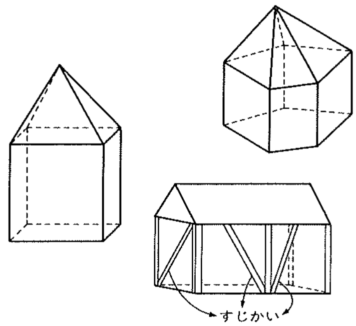
	文章１－２	文章２－２	文章３－２	文章４
M君	26.10	23.12	22.90	34.79
N君	20.09	15.59	18.78	25.15
O君	27.17	21.60	23.96	32.65
P君	20.90	16.62	16.00	22.91
平均	23.57	19.23	20.41	28.88

文章４の音読時間のグループ平均の比率により各文章の長さの違いを補正する．

素データのグループ間比率	1.81	2.77	1.47	1.13
Bグループの補正された平均	26.61	21.71	23.04	32.60
補正されたグループ間比率	1.60	2.45	1.30	1.00

問題　4

今日は諸君に「地震に強い，それでいて価格が安い」家を設計してもらおうと思います．頭で考えるだけでなしに，割り箸を木材の代わり，輪ゴムを釘の代わりにしていろいろ実験もしてみてください．割り箸一本は例えば一万円、輪ゴム一本は百円くらいに考えておいてくれますか．この際，壁のことは考えに入れないでください．一般に「すじかい」を入れると強いと言われているのですがそれは数学的にはなぜでしょう，それ以外の構造は考えられないでしょうか，すなわち「すじかい」は最強構造の必要条件でしょうか？



問題　5

問題４にも関係するかもしれませんが，コストだけでなしに，面積・体積も考えに入れるとどうでしょう．例えば，等しい長さの辺を持つ多角形のうちの面積最大のものは何でしょう．また，正多角形の部屋に最小面積の屋根をどう葺くかを考えてみてください．ここで，屋根はこの正多角形の部屋の上に錐体をなしているものとしましょう（図を参照してください）．数学的に言うと，屋根の錐体の体積を一定にしておいて，屋根の表面積を最小にするには屋根の頂点をどこにすればいいかという問題です．きちんと証明しようとすると意外に難しいものですよ．