三角関数の定義

坂本　茂（さかもと　しげる）

ベクトルを用いて三角関数を次のように定義すれば，各象限によって公式の証明を確認する必要がないし，単位円を描く必要もない．三角関数の定義は級数展開を用いた場合など幾何学によらない方法があるが，この方法ではまだ角度に関して図形に頼るものである．

1 正規直交系

零ベクトルでなく，平行でもない任意のベクトルすなわち1次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ とするとき実数 x，y を用いて $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}_1+y\boldsymbol{a}_2$ と書かれるベクトル $\boldsymbol{p}$ の集合は基底 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ が張るベクトル空間 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\}$ という．基底の選び方は幾通りもあるが，基底に対してはベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{p}$ は上のように一意的に書かれる．x は第1基底ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の，y は第2基底ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の成分といい $\boldsymbol{p}=(x,\ y)$ と成分表示される．

平面上で任意の点Pの原点Oに対する位置ベクトル $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の集合はベクトル空間である．Oと異なる2点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ をとり $\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$，$\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ を基底とするベクトル空間 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\}$ になる．

このとき座標系 $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)$ といい，任意の点Pに対する位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ であるとき $(x,\ y)$ を点Pの座標と呼び，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{A_1}(1,\ 0)$，$\mathrm{A_2}(0,\ 1)$ などと書く．$\boldsymbol{a}_1=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{a}_2=(0,\ 1)$ であるが，

$$長さ\ |\boldsymbol{a}_1|=\mathrm{OA_1}=a_1,\ |\boldsymbol{a}_2|=\mathrm{OA_2}=a_2$$

である．$\angle\mathrm{A_1OA_2}$ は基底ベクトルのなす角であり，座標系 $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)$ は一般に斜交座標系と呼ばれる．

ここで基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$ となるように選んだとき $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ を正規直交系という．

2 三角関数の定義

正規直交系 $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ において原点Oを中心に第1基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ を第2基底ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ の向きに角 θ 回転させたベクトルを $\boldsymbol{f}(\theta)$ とすると，次のことが成り立つ．

[定理]　正規直交系 $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ のとり方によらず

$$\boldsymbol{f}(\theta)=m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2$$

と書き表される2つの実数 m，n が，角 θ に関し一意的に決まる．

《証明》　ある正規座標系に対し一意的に $\boldsymbol{f}(\theta)=m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2$ と書ける．また，どの正規直交座標系も合同（等長変換）であるから，結局正規座標系のとり方によらず m，n は θ に対して一意に決まることになる．すなわち，どの正規直交系でも $\boldsymbol{f}(\theta)$ の成分座標は変わらないということである．

これを詳しく示す．正規直交系 $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ に対する $\boldsymbol{f}(\theta)$ は単位ベクトルであり，基底ベクトルは $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{f}(0)$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{f}(\pi/2)$ であるから正規直交系は $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{f}(0),\ \boldsymbol{f}(\pi/2))$ であり $\boldsymbol{f}$ によって決まるといえる．

$$\boldsymbol{f}(\theta)=m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2=m\boldsymbol{f}(0)+n\boldsymbol{f}(\pi/2)=(m,\ n)$$

と一意的に書けるが，他の正規直交系との関係を次に示す．

i　$\boldsymbol{f}(\theta)=m\boldsymbol{f}(0)+n\boldsymbol{f}(\pi/2)$ をOの周りに角 α 回転すると

$$\boldsymbol{f}(\alpha+\theta)=m\boldsymbol{f}(\alpha)+n\boldsymbol{f}(\alpha+\pi/2)$$

となるが，$\boldsymbol{f}(\alpha)$，$\boldsymbol{f}(\alpha+\pi/2)$ はそれぞれ正規直交系形 $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ の第1基底，第2基底ベクトルを角 α 回転させたベクトルであるから正規直交系 $(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{f}(\alpha),\ \boldsymbol{f}(\alpha+\pi/2))$ の基底である．また $\boldsymbol{f}(\alpha+\theta)$ はこの正規直交系の第1基底ベクトルから第2基底ベクトル方向に角 α 回転したものである．したがって，その座標は $(m,\ n)$ である．

ii　$(\mathrm{O}\,;\,\boldsymbol{e}_1,\ -\boldsymbol{e}_2)$ は正規直交系であるが回転によ

って得られないものである．これは鏡像，線対称，裏返しなどと呼ばれる変換で得られ，逆系または左手系という．この第1基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ を第2基底ベクトル $-\boldsymbol{e}_2$ 方向に角 θ 回転させたベクトルは $\boldsymbol{f}(-\theta)$ である．これは一意的に

$$\boldsymbol{f}(-\theta)=m'\boldsymbol{e}_1+n'(-\boldsymbol{e}_2)=m'\boldsymbol{e}_1-n'\boldsymbol{e}_2$$

と書けるが，$\boldsymbol{f}(-\theta)$ と $\boldsymbol{f}(\theta)$ は $\boldsymbol{e}_1$ の方向に対し線対称である．したがって $m'=m$, $n'=n$ となる．なお $-\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{f}(-\pi/2)$ から $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{f}(0),\ \boldsymbol{f}(-\pi/2))$ とこの正規直交系は書かれる．これを角 α 回転した正規直交系 $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{f}(\alpha),\ \boldsymbol{f}(\alpha-\pi/2))$ は逆系であるが i と同様にして第1基底ベクトルを第2基底ベクトルの方向に回転したベクトルの座標は $(m,\ n)$ である．

したがって，正系，逆系を問わず角 α の回転で得られる正規直交系

$$(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{f}(\alpha),\ \boldsymbol{f}(\alpha\pm\pi/2))$$

に関しては定理が成り立つ．

iii 平行移動された正規直交系 $(\mathrm{O}'\,;\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ に関しては基底ベクトルは変わらず $\boldsymbol{f}(\theta)$ も同じであるから定理は成り立つ．

他の直交基底は平行移動，回転，線対称の組み合わせである．ゆえに，すべての正規直交基底について定理は成り立つ． ■

なお，平面上の剛体運動は回転と平行移動だけで決まる．また，等長変換（合同）はこれに線対称が加わるが，どの等長変換も3回までの線対称で定まることが示される．

［定義］ 正規直交系 $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ において $\boldsymbol{f}(\theta)=m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2$ のとき，角 θ の余弦，正弦を $\cos\theta=m$, $\sin\theta=n$ により定義する．すなわち

$$\boldsymbol{f}(\theta)=\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

定理の証明で得られる次の系は応用上重要である．

［系］ 正規直交系 $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{f}(0),\ \boldsymbol{f}(\pi/2))$ において $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{f}(\alpha),\ \boldsymbol{f}(\alpha+\pi/2))$, $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{f}(\alpha),\ \boldsymbol{f}(\alpha-\pi/2))$ はそれぞれ同じ向き，逆の向きの正規直交系であり

$$\boldsymbol{f}(\alpha\pm\theta)=\boldsymbol{f}(\alpha)\cos\theta+\boldsymbol{f}(\alpha\pm\pi/2)\sin\theta$$

が成り立つ．

3 諸公式の証明

［系］により三角関数の基本的公式が得られる．

［例1］ $\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{e}_1\cos 0+\boldsymbol{e}_2\sin 0$,
一方 $\boldsymbol{f}(0)=\boldsymbol{e}_1=1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2$ であるから
$\cos 0=1$, $\sin 0=0$ である．同様にして

$$\boldsymbol{f}(\pi/2)=\boldsymbol{e}_2 \text{ から } \cos(\pi/2)=0,\ \sin(\pi/2)=1$$

$$\boldsymbol{f}(\pi)=-\boldsymbol{e}_1 \text{ から } \cos\pi=-1,\ \sin\pi=0$$

$$\boldsymbol{f}(3\pi/2)=-\boldsymbol{e}_2 \text{ から } \cos(3\pi/2)=0,\ \sin(3\pi/2)=-1$$

［例2］ $\boldsymbol{f}(\theta)$ は単位円周上の点の位置ベクトルであるから，次がいえる．

$$-1\leqq\cos\theta\leqq 1,\quad -1\leqq\sin\theta\leqq 1$$

直角二等辺三角形の辺の比から
$\boldsymbol{f}(\pi/4)=\boldsymbol{e}_1/\sqrt{2}+\boldsymbol{e}_2/\sqrt{2}$ である．
したがって $\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)=1/\sqrt{2}$
また，正三角形の高さは相似形を使い求められ $\pi/3$, $\pi/6$ の正弦，余弦も同様に求められる．しかし，ピタゴラスの定理の成立はまだ仮定していないのである．

［例3］ $\boldsymbol{f}(-\theta)=\boldsymbol{f}(0)\cos\theta+\boldsymbol{f}(-\pi/2)\sin\theta$ から

$$\boldsymbol{e}_1\cos(-\theta)+\boldsymbol{e}_2\sin(-\theta)=\boldsymbol{e}_1\cos\theta-\boldsymbol{e}_2\sin\theta$$

となる．

よって $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

n を整数として $\boldsymbol{f}(\theta+2n\pi)=\boldsymbol{f}(\theta)$ であるから

$$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta,\quad \sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$$

$$\boldsymbol{f}(\theta\pm\pi)=\boldsymbol{f}(\pm\pi)\cos\theta+\boldsymbol{f}(\pi/2\pm\pi)\sin\theta$$
$$=-\boldsymbol{e}_1\cos\theta-\boldsymbol{e}_2\sin\theta$$

$$\cos(\theta\pm\pi)=-\cos\theta,\quad \sin(\theta\pm\pi)=-\sin\theta$$

［例4］ $\boldsymbol{f}(\pi/2-\theta)=\boldsymbol{f}(\pi/2)\cos\theta+\boldsymbol{f}(0)\sin\theta$ から

$$\boldsymbol{e}_1\cos(\pi/2-\theta)+\boldsymbol{e}_2\sin(\pi/2-\theta)=\boldsymbol{e}_2\cos\theta+\boldsymbol{e}_1\sin\theta$$

であるから $\cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta$, $\sin(\pi/2-\theta)=\cos\theta$ ここで θ を $-\theta$ にかえればいいが，

$$\boldsymbol{f}(\pi/2+\theta)=\boldsymbol{f}(\pi/2)\cos\theta+\boldsymbol{f}(\pi)\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{e}_1\cos(\pi/2+\theta)+\boldsymbol{e}_2\sin(\pi/2+\theta)=\boldsymbol{e}_2\cos\theta-\boldsymbol{e}_1\sin\theta$$

であるから

$$\cos(\pi/2+\theta)=-\sin\theta,\quad \sin(\pi/2+\theta)=\cos\theta$$

［例5］ $\boldsymbol{f}(\pi+\theta)=\boldsymbol{f}(\pi)\cos\theta+\boldsymbol{f}(3\pi/2)\sin\theta$,
$\boldsymbol{f}(\pi-\theta)=\boldsymbol{f}(\pi)\cos\theta+\boldsymbol{f}(\pi/2)\sin\theta$ から

$$\boldsymbol{e}_1\cos(\pi\pm\theta)+\boldsymbol{e}_2\sin(\pi\pm\theta)=-\boldsymbol{e}_1\cos\theta\mp\boldsymbol{e}_2\sin\theta$$

$$\cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta,\quad \sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta$$

［例6］ $(\cos(\theta\pm 3\pi/2),\ \sin(\theta\pm 3\pi/2))$

$$=\boldsymbol{f}(\theta\pm 3\pi/2)$$
$$=\boldsymbol{f}(\pm 3\pi/2)\cos\theta+\boldsymbol{f}(\pm 3\pi/2+\pi/2)\sin\theta$$
$$=\mp\boldsymbol{e}_2\cos\theta\pm\boldsymbol{e}_1\sin\theta=(\pm\cos\theta,\ \mp\sin\theta)$$

以上は3つの公式にまとめられる．逆系の基底から

❶ $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

であり，正弦，余弦の名称を与える式

❷　$\cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta$，$\sin(\pi/2-\theta)=\cos\theta$

であり，また差が π である角の正弦，余弦は符号だけが変わる．

❸　$\cos(\theta\pm\pi)=-\cos\theta$，$\sin(\theta\pm\pi)=-\sin\theta$

例えば，❸，❶，❷の順に使えば次のように変形できる．

$$\cos(\pi/2+\theta)=-\cos(\theta-\pi/2)=-\sin\theta,$$
$$\sin(\pi/2+\theta)=-\sin(\theta-\pi/2)=\cos\theta$$

加法定理の証明は簡単になる．次のような単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$

$$\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{f}(\alpha)=\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha,$$
$$\boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{f}(\alpha+\pi/2)=\boldsymbol{e}_2\cos\alpha-\boldsymbol{e}_1\sin\alpha,$$

を基底とする正規直交基底 $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_2')$ において

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}'(\beta)&=\boldsymbol{e}_1'\cos\beta+\boldsymbol{e}_2'\sin\beta\\&=\boldsymbol{e}_1(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\&\quad+\boldsymbol{e}_2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

となるが $\boldsymbol{f}'(\beta)=\boldsymbol{f}(\alpha+\beta)$

$$=\boldsymbol{e}_1\cos(\alpha+\beta)+\boldsymbol{e}_2\sin(\alpha+\beta)$$

であり

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

[例 7]　この式と[例 1]との結果より[例 3]から[例 6]までの式を作ることができる．すなわち $\cos\pi=-1$，$\sin\pi=0$ であるから $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$，$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$ など．

4 座標変換

ここで座標変換を考える．正規直交基底 $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ に基づく直交座標 $(x,\ y)$ とし，正規直交基底 $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_2')$ に基づく直交座標 $(x',\ y')$ とすると，任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'$$

と書けるが

$$\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha,\qquad \boldsymbol{e}_2'=-\boldsymbol{e}_1\sin\alpha+\boldsymbol{e}_2\cos\alpha$$

であるから

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

となる．行列を使えば $\boldsymbol{x}=T(\alpha)\boldsymbol{x}'$ となる．

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},\ T(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\sin\theta\end{pmatrix}$$

座標軸を α 回転してから更に β 回転させることは，初めから $(\alpha+\beta)$ 回転させることと同じであり $T(\alpha)T(\beta)=T(\alpha+\beta)$ が成り立つ．したがって，行列の積を計算し加法定理を得ることができる．また，逆変換は逆回転であるから $T^{-1}(\theta)=T(-\theta)$ である．

同じ座標系の xy 座標において，点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ を原点の周りに角 θ 回転させた点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ との関係を考える．P_1 は θ 回転した座標系 $x'y'$ 座標では座標が変わらないから $(x_0,\ y_0)$ と表されて

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=T(\theta)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

である．すなわち，同じ座標系での図形の回転は $T(\theta)$ により移される．一方，座標軸の回転では同じ図形の座標が $T^{-1}(\theta)$ により新しい座標へ移される．

5 内積の定義

ベクトル空間での 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$ により定義され，あとから角が定義されることになる．しかし，位置ベクトルによるベクトル空間から定めた $(\mathrm{O}\,;\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ は幾何学的なものである．三角関数もそれにより定義されたので，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を用い内積は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ で定義するものとする．

この定義によれば交換法則，結合法則，加法に関する分配法則の成り立つことが図形的に矢線ベクトルで示される．$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ であるから，一般に斜交座標では OP の長さ $|\boldsymbol{p}|$ は

$$|\boldsymbol{p}|^2=|x\boldsymbol{a}_1+y\boldsymbol{a}_2|^2=x^2|\boldsymbol{a}_1|^2+2xy(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)+y^2|\boldsymbol{a}_2|^2$$

により求められる．正規直交座標では

$$|\boldsymbol{e}_1|^2=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=1,\ |\boldsymbol{e}_2|^2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=0$$

であるから $|\boldsymbol{p}|^2=x^2+y^2$ すなわち内積の法則から，ここで初めてピタゴラスの定理が証明されたのである．また

$$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2=|\boldsymbol{p}|^2+|\boldsymbol{q}|^2-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta$$

は余弦定理であり $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ のなす角 θ が直角のときピタゴラスの定理である．

ここで $\boldsymbol{f}(\theta)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ は $|\boldsymbol{f}(\theta)|=1$ であるから

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

が成り立つのである．$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積を成分で表すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)\\&=a_1b_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a_1b_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+a_2b_1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+a_2b_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

となり $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$ である．

単位ベクトル $\boldsymbol{f}(\alpha)=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\boldsymbol{f}(\beta)=(\cos\beta,\ \sin\beta)$ のなす角は $|\alpha-\beta|$ であるから内積を考えて次の式を得る．

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

6 オイラーの式

正規直交座標系 $(\mathrm{O}\,;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ による座標平面を複素数平面とみる．すなわちベクトル $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ を，複素数 $x+yi$ とみると，ベクトル $\boldsymbol{f}(\theta)$ は複素値実関数 $f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ に対応する．これは単位円周上にある複素数で $|f(\theta)|=1$ である．2つの複素数

$$f(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad f(\beta)=\cos\beta+i\sin\beta$$

の積は $i^2=-1$ であるから

$$\begin{aligned}f(\alpha)f(\beta)&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\&\qquad+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\&=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=f(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

となる．したがって，任意の実数 α, β に対して次の性質が成り立つ．

$$f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$$

$\alpha=\beta=\theta$ とおくと $\{f(\theta)\}^2=f(2\theta)$ であり，更に $\{f(\theta)\}^n=f(n\theta)$ となるが，これはド・モアブルの公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

である．ここで θ を θ/n でおき換え

$$(\cos(\theta/n)+i\sin(\theta/n))^n=\cos\theta+i\sin\theta$$

となるが，自然対数の低 e は $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ で定義できるから，$n\to\infty$ とすると $(\cos(\theta/n)+i\sin(\theta/n))^n\to(1+i\theta/n)^n\to e^{i\theta}$ となりオイラーの式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を得る．

ところで $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ を関数方程式とみて，この性質をもつ関数を求めてみよう．$\beta=t$ を変数とし $f(\alpha)f(t)=f(\alpha+t)$ を t で微分して

$$f'(\alpha+t)=f(\alpha)f'(t)$$

となる．$t=0$ として $f'(\alpha)=f(\alpha)f'(0)$ であるが，$f'(0)=k$ とおき α は任意であるから，次に $\alpha=t$ を変数として考えれば

$$f'(t)=kf(t),\qquad z=f(t)\ \text{として}\ \frac{dz}{dt}=kz$$

である．この微分方程式を満足する関数で $z=0$ 以外の関数を求める．

微分しても変わらない複素関数が存在すると仮定してこれを $E(z)$ で表すものとする．$E(z)'=E(z)$ ただし $E(0)=1$ とする．そして，その逆関数を $w=\log z$ とすると $\log 1=0$ である．$z=E(w)$ であるから

$$dw/dz=1/(dz/dw)=1/E(w)=1/z$$

$$\frac{d}{dz}\log z=\frac{1}{z}$$

となる．したがって，この微分方程式の解は

$$\int\frac{dz}{z}=k\int dt,\qquad \log z=kt+c,\qquad z=E(kt+c)$$

ところで $\alpha=\beta=0$ とすると $\{f(0)\}^2=f(0)$ であるから $f(0)=0$, 1 である．$f(0)=0$ ならば $z=f(t)=0$, $f(0)=1$ ならば $E(c)=1$ で $c=\log 1=0$ となり $z=f(t)=E(kt)$ となる．t は実数，z, k は複素数である．

任意の実数 α, β に対し $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ であるから

$$E(k\alpha)E(k\beta)=E(k(\alpha+\beta))$$

複素数 $z_1=k\alpha$, $z_2=k\beta$ とおいて $E(z_1)E(z_2)=E(z_1+z_2)$ が成り立つ．

関数 $f(x)$ で性質

$$f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$$

をもてば関数 $f_1(x)=f(mx)$ についてもこの性質

$$f_1(\alpha)f_1(\beta)=f_1(\alpha+\beta)$$

をもつ．また，2つの関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ がそれぞれこの性質

$$f_1(\alpha)f_1(\beta)=f_1(\alpha+\beta),\quad f_2(\alpha)f_2(\beta)=f_2(\alpha+\beta)$$

をもてば，関数 $f(t)=f_1(t)f_2(t)$ は

$$f(\alpha)f(\beta)=f_1(\alpha)f_2(\alpha)f_1(\beta)f_2(\beta)=f(\alpha+\beta)$$

であるからこの性質をもつ．

実関数 c^t はこの性質をもち，$f_1(t)=c^{mt}$ もこの性質をもつ．自然対数の底 e を用い $c^m=e^a$ と書けるから $f_1(t)=e^{at}$ と表せてこれは

$$f_1(t)=e^{at}=E(kt)$$

と書かれる．微分して $ae^{at}=kE(kt)$ となり $a=k$ である．したがって $f_1(t)=e^{at}=E(at)$ である．

関数 $\cos t+i\sin t$ はこの性質をもち，$f_2(t)=\cos bt+i\sin bt$ もこの性質をもつ．よって

$$f_2(t)=\cos bt+i\sin bt=E(kt)$$

とならなければならない．微分して $ib(\cos bt+i\sin bt)=kE(kt)$ となり $ib=k$ である．よって $f_2(t)=\cos bt+i\sin bt=E(ibt)$ である．なお，角度が弧度法で表されていたときの微分である．

関数 $f(t)=f_1(t)f_2(t)=e^{at}(\cos bt+i\sin bt)$ もこの性質をもち，$f(t)=E(at)E(bit)=E((a+bi)t)$ であるから

$$f(t)=E((a+bi)t)=e^{at}(\cos bt+i\sin bt)$$

これで $E(z)'=E(z)$ となる複素関数 $E(z)$ が実際に得られた．

実指数関数 e^{at} は関数方程式 $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ の解として定義できる．複素指数関数 e^{zt} も関数方程式 $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ の解で定義すれば $e^{(a+bi)t}=E((a+bi)t)$ となるから

$$e^{bit}=E(bit)=\cos bt+i\sin bt$$

でなければならない．

したがって $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ である．

分数指数は $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$ で定義すると指数法則が成り立った．同様に複素数の巾乗が定義されていないのでオイラーの式は証明されるものではない．指数法則が成り立つ等，その妥当性を示したものである．

7 ベクトルによる複素数体の構成

正規直交系 $(O\,;\,\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{i})$ において基底ベクトル $\boldsymbol{e}=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{i}=(0,\ 1)$ により任意ベクトル $\boldsymbol{p}=(x,\ y)$ は $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}+y\boldsymbol{i}$ で表される．これを単に $(x,\ y)=x+yi$ と表記して，和と実数倍の計算に混乱を生じない．これを2次元ベクトルの複素表示と呼ぶ．

ベクトル $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{i}$ の向きに角 θ 回転させたベクトルを $\boldsymbol{e}(\theta)$ とすると $\boldsymbol{e}(0)=1$，$\boldsymbol{e}(90^\circ)=i$ などとなる．$\boldsymbol{e}(\theta)$ は前節までの $\boldsymbol{f}(\theta)$ である．

[定義]　$\boldsymbol{e}(\theta)=m+ni \iff \cos\theta=m,\ \sin\theta=n$

例えば $\pm\boldsymbol{e}(\alpha+90^\circ)=\boldsymbol{e}(\alpha+90^\circ)$ であるから

$\pm\cos(\alpha+90^\circ)\pm i\sin(\alpha+90^\circ)$

$=\cos(\alpha\pm90^\circ)+i\sin(\alpha\pm90^\circ)$

第2節の[系]は，次の式で表される．

[系]　$\boldsymbol{e}(\alpha\pm\theta)=\boldsymbol{e}(\alpha)\cos\theta\pm\boldsymbol{e}(\alpha+90^\circ)\sin\theta$

これは三角関数の加法定理と同じである．

$\cos(\alpha\pm\beta)+i\sin(\alpha\pm\beta)=\boldsymbol{e}(\alpha\pm\beta)$

$=\boldsymbol{e}(\alpha)\cos\beta\pm\boldsymbol{e}(\alpha+90^\circ)\sin\beta$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cos\beta\pm(i\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$

$=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\quad+i(\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\cos\beta)$

である．なお $\boldsymbol{e}(\alpha+90^\circ)=i\cos\alpha-\sin\alpha$ である．また，諸公式が導かれるが，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ はピタゴラスの定理と同等である．

ベクトル(複素数) z の積を考えたい．$z=r\boldsymbol{e}(\theta)$ より $\boldsymbol{e}(\alpha)$，$\boldsymbol{e}(\beta)$ の積が定義されれば，一般に積が定まる．いま仮に $\boldsymbol{e}(\alpha+90^\circ)=\boldsymbol{e}(\alpha)\boldsymbol{e}(90^\circ)$ ならば，これは $i\boldsymbol{e}(\alpha)$ となるから i を乗ずることは 90° の回転を意味する．しかも[系]は次のように書かれ，これを単位ベクトルの積の定義とし採用する．

[定義]　$\boldsymbol{e}(\alpha)\boldsymbol{e}(\beta)=\boldsymbol{e}(\alpha+\beta)$

例えば $\boldsymbol{e}(90^\circ)\boldsymbol{e}(90^\circ)=\boldsymbol{e}(180^\circ)$ より $i^2=-1$ となる．

[定理]　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

《証明》　$a+bi=r\boldsymbol{e}(\alpha)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$\qquad c+di=s\boldsymbol{e}(\beta)=s(\cos\beta+i\sin\beta)$

とすると

$(a+bi)(c+di)=r\boldsymbol{e}(\alpha)s\boldsymbol{e}(\beta)$

$=rs\boldsymbol{e}(\alpha+\beta)=rs\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}$

$=rs\{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\quad+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)\}$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$　■

さて，和と積が定義された複素数の集合が体をなすことを確かめるのに行列を利用してみよう．

$$T(\alpha)T(\beta)=T(\alpha+\beta)$$

が成り立つから $\boldsymbol{e}(\theta)$ を $T(\theta)$ で表せば，これは $\boldsymbol{e}(\alpha)\boldsymbol{e}(\beta)=\boldsymbol{e}(\alpha+\beta)$ に対応し，$T(\alpha)+T(\beta)$ は $\boldsymbol{e}(\alpha)+\boldsymbol{e}(\beta)$ に対応している．$z=r\boldsymbol{e}(\theta)$ は $rT(\theta)$ で表され，次のようになる．

$$rT(\theta)=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

$$=aE+bI$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

行列 $aE+bI$ と複素数 $a+bi$ が演算も含めて対応している．$aE+bI$ の形の行列の集合は体をなすから，これと同一視できる複素数 $a+bi$ の集合も体をなす．なお前節で述べたオイラーの式は $\boldsymbol{e}(\theta)=e^{i\theta}$ で表される．

(東京都立 新宿高等学校)