満水にした風呂の底面・側面の見かけの形状

大木　實（おおき みのる）

満水にした底の浅い風呂に入って水平な底面や鉛直な側面を見ると底面は浮き上がって見え，側面は内側に湾曲して見えます．両面の交線は視点を下げると近づいて見えます．この様子を調べ，視点を通る鉛直断面内での底面・側面の見かけの曲線，その交線の視点の変化に伴う軌跡を求めてみます．

「これは50年前の復員直後に湯風呂に入って思いつき1晩がかりで解いた問題ですが，その後この問題を見かけたことが無いので新作問題として初めて発表する次第です．最初の解答は包絡線の理論を用いましたが，ここでは現行の高校生に適するように改めました．」

［問題］　光線は屈折率の異なる媒質の境界面を通過して進むとき進路が屈折します．水面上の点Oの上方 s の点Sを視点として，Oの下方 u の前方 t の点Tを見たとき，Tの見かけの位置をPとし，次の曲線の方程式を求めます．水の屈折率を n とします．

I．t が変化するときのPの軌跡（u，s は固定値）

II．u が変化するときのPの軌跡（t，s は固定値）

III．s が変化するときのPの軌跡（u，t は固定値）

［解答］　Oを原点として前方に x 軸，下方に y 軸をとり，座標を O(0, 0)，S(0, $-s$)，T(t, u)，P(x, y)，B(t, 0)，TよりSに進む光線の水面との交点を R(r, 0) とします．

屈折率の定義により

$$n=\frac{\sin(90^\circ-\angle\mathrm{ORS})}{\sin(\angle\mathrm{ORT}-90^\circ)}=\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RS}}\Big/\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RT}}$$

$$\therefore\quad n=\frac{r}{(r^2+s^2)^{\frac{1}{2}}}\Big/\frac{t-r}{\{(t-r)^2+u^2\}^{\frac{1}{2}}}\qquad\cdots\cdots ①$$

Pは直線SR上にあるから $y=\dfrac{s(x-r)}{r}$ ……②

①から　$n^2(t-r)^2(r^2+s^2)=r^2\{(t-r)^2+u^2\}$

$\dfrac{u}{n}=v$，$\dfrac{n}{(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}=m$ とおくと

$$v^2r^2=(t-r)^2\left(\frac{r^2}{m^2}+s^2\right)$$

②を代入して

$$v^2-(t-r)^2\left\{\frac{1}{m^2}+\frac{y^2}{(x-r)^2}\right\}=0\qquad\cdots\cdots ③$$

③は t，v，r，x，y の関係を示しており，③の左辺を $F(t,\ v,\ r,\ x,\ y)$ とおきます．屈折点Rがわずかに変化し R′($r+\Delta r$, 0) となり，屈折光線が S′(0, $s+\Delta s$) を通るとき Δr を微少量とすると直線S′R′ も点Pを通るから $F(t,\ v,\ r+\Delta r,\ x,\ y)=0$ が成立します．

ゆえに　$\dfrac{dF}{dr}=0$

③を r で微分して

$$(t-r)\left\{\frac{1}{m^2}+\frac{y^2}{(x-r)^2}\right\}-\frac{(t-r)^2y^2}{(x-r)^3}=0$$

ゆえに　$(x-r)^3-m^2y^2(t-x)=0$ ……④

I．の場合　②，③，④から r，t を消去し，x，y，s，v の関係を求めます．

④から　$t-r=x-r+\dfrac{(x-r)^3}{(my)^2}$

②から　$x-r=xy(y+s)$

ゆえに　$t-r=\dfrac{xy\left\{(y+s)^2+\dfrac{x^2}{m^2}\right\}}{(y+s)^3}$

上式を③に代入すると

$$v^2=\frac{y^2\left\{(y+s)^2+\dfrac{x^2}{m^2}\right\}^3}{(y+s)^6}\qquad\cdots\cdots ⑤$$

ゆえに　$x^2=m^2(y+s)^2\left\{\left(\dfrac{v}{y}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}$ ……⑥

II．の場合　②，③，⑤から r，v を消去し，x，y，s，t の関係を求めます．

②，③から　$v^2=\left(t-\dfrac{sx}{y+s}\right)^2\left\{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{(y+s)^2}{x^2}\right\}$

$$=\frac{(ty+ts-sx)^2\left\{(y+s)^2+\dfrac{x^2}{m^2}\right\}}{\{x(y+s)\}^2}$$

上式を⑤に代入すると

$$\frac{(ty+ts-sx)^2}{\{x(y+s)\}^2}=\frac{y^2\left\{(y+s)^2+\frac{x^2}{m^2}\right\}^2}{(y+s)^6}$$

ゆえに $\dfrac{(y+s)(t-x)}{x}=\dfrac{yx^2}{\{(y+s)m\}^2}$

よって $\dfrac{x^3}{t-x}=\dfrac{m^2(y+s)^3}{y}$ …… ⑦

III. の場合　⑥, ⑦から s を消去し, x, y, t, v の関係を求めます.

⑥から　$y+s=\dfrac{x}{m\left\{\left(\dfrac{v}{y}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}^{\frac{1}{2}}}$

上式を⑦に代入すると　$t-s=my\left\{\left(\dfrac{v}{y}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}^3$

ゆえに　$\left(\dfrac{t-x}{m}\right)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=v^{\frac{2}{3}}$ …… ⑧

⑥, ⑦, ⑧がそれぞれ I. II. III. の場合の求める曲線の式です.

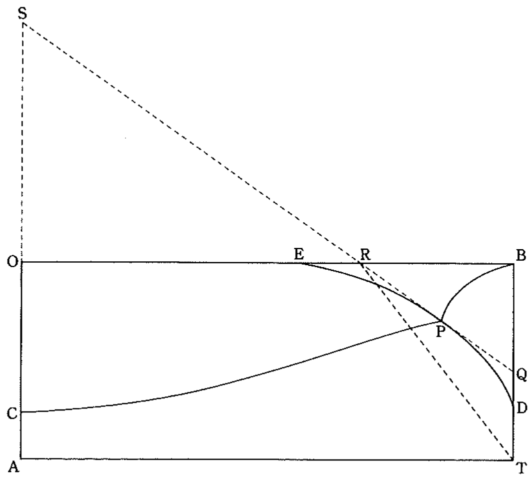
⑥, ⑦, ⑧は1点Pで交わり直線PSは⑧の接線となります.

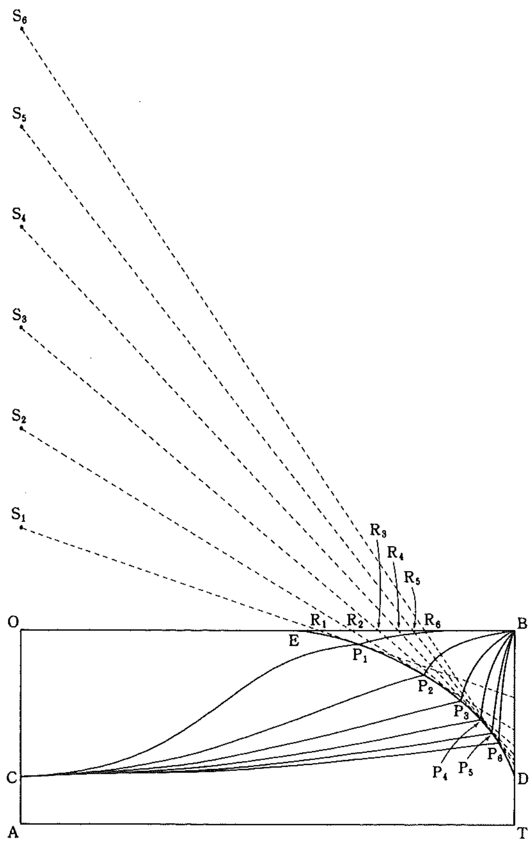
［結論］ 水の屈折率：n, $v=\dfrac{u}{n}$, $m=\dfrac{n}{(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

とし, 点の座標を O(0, 0), $S_k(0, -s_k)$, $T(t, u)$, $P_k(x_k, y_k)$, A(0, u), B(t, 0), C(0, v), D(t, v), E($t-mv$, 0), $R_k(r_k, 0)$ ($k=1, 2, \cdots\cdots$) とします.

水面OBより上方の点 S_k から水中の水平線ATを見ると像は曲線 CP_k (⑥) となり, 鉛直線BTを見ると像は曲線 BP_k (⑦) となります.

水中の点Tを光源とする光線 TR_k の水面より上方の屈折光線 R_kS_k が作る火線 (直線 R_kS_k の包絡線) は曲線 DP_kE (⑧) となり, 水面より上方から見たTの像の軌跡となります.





[検証]　火線⑧について，⑧の接線が空中よりの入射光線のとき屈折率 n の水中での屈折光線は点 $T(t,\ u)$ を通ることを直接証明します．

曲線⑧上の点 $P(x,\ y)$ で接する接線の式を求めます．$t-x=w$ とおいて

$$⑧:\left(\frac{w}{m}\right)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=v^{\frac{2}{3}}$$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{y}{wm^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\text{接線の式}:\ Y-y=\left(\frac{y}{wm^2}\right)^{\frac{1}{3}}(X-x) \quad \cdots\cdots ⑨$$

$B(t,\ 0)$ とし，接線⑨と水面の交点を $R(r,\ 0)$，鉛直線 BT との交点を $Q(t,\ q)$ とします．

$$RB=t-r=w+(wy^2m^2)^{\frac{1}{3}}$$

⑧により y を消去すると　$RB=(wm^2v^2)^{\frac{1}{3}}$

$$BQ=q=y+\left(\frac{yw^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

⑧により w を消去すると　$BQ=(yv^2)^{\frac{1}{3}}$

$$BT=u=\frac{vm}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

ゆえに　$RQ^2=BQ^2+RB^2$

$$=\left\{v^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{w}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}v^{\frac{4}{3}}+(wm^2v^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$=v^2+\left(\frac{wv^2}{m}\right)^{\frac{2}{3}}(m^2-1)$$

$$RT^2=BT^2+RB^2=\frac{v^2m^2}{m^2-1}+(wm^2v^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left\{v^2+\left(\frac{wv^2}{m}\right)^{\frac{2}{3}}(m^2-1)\right\}\frac{m^2}{m^2-1}$$

よって　$\dfrac{RT}{RQ}=\dfrac{m}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}}=n$

他方　$\dfrac{RT}{RQ}=\dfrac{RB}{RQ}\Big/\dfrac{RB}{RT}=\dfrac{\sin(90°-\angle BRQ)}{\sin(90°-\angle BRT)}$

は水の屈折率を意味するので⑨に重なる入射光線に対し屈折光線はTを通ります．

水中の点Tを空中より見たとき，Tの像が火線DE(⑧)上の点Pに来るときは，ATの像は曲線CP(⑥)となり，BTの像は曲線BP(⑦)となります．

[1995.8.1]