1次変換の性質を使った直線の像の簡単解法

福田　仁己（ふくだ　よしみ）

1.　はじめに

1次変換の性質を学習しながら，従来の解法は計算が大変で途中で挫折する生徒が多いが，行列を使うと本来簡単に変換式が表せるのであるから，答も一発ででると生徒も興味をもつものである．私は代数・幾何の計算は簡単にできてこそ値打ちがあると考え，いくつか実行している．まず直線の像について，行列式のたすき掛けのような計算を3回やるだけで答が出る方法を説明します．

2.　行列が逆行列をもつとき

1次変換の性質

1次変換 f を表す行列が逆行列をもつとする．
1　f は座標平面 E を E 全体に移す．
2　f は1つの直線をまた1つの直線全体に移す．

(証明)　直線 $px+qy+r=0$ は1次変換 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって

$ad-bc\neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の像を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とすると

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ では

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるから

$$px+qy=\frac{1}{ad-bc}\{p(dx'-by')+q(-cx'+ay')\}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\{(dp-cq)x'+(aq-bp)y'\}$$

となり，直線 $px+qy+r=0$ は

直線 $\underline{(dp-cq)}x+\underline{(aq-bp)}y+\underline{(ad-bc)}r=0$

に移る．この結果の**3ケ所の**〰〰に着目して以下のようにして答を求める．

> 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f によって，直線 $x-3y=6$ はどんな図形に移されるか．

解　$x-3y-6=0$（一般形にする）
（行列の1行目と2行目の間に x と y の係数を挿入する）
たすき掛けを3回する．

$$\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 1 & -3 \\ -1 & -3 \end{array}$$

$D=2\cdot(-3)-5(-1)=\mathbf{-1}\neq 0$ ……　定数項の係数
$2\cdot(-3)-5\cdot 1=\mathbf{-11}$ ……　y の係数
$1\cdot(-3)-(-3)\cdot(-1)=\mathbf{-6}$ ……　x の係数

求める直線は

$$\mathbf{-6}x\mathbf{-11}y\mathbf{-1}\cdot(-6)=0$$

すなわち　$6x+11y=6$

> $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f によって直線 $5x-2y=3$ に移されるもとの図形を求めよ．

解　求める直線を $ax+by+c=0$ とすると

$$D=1\cdot 4-3\cdot 2=-2\neq 0$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ a & b \\ 2 & 4 \end{array}\qquad \begin{cases} b-3a=-2 \\ 4a-2b=5 \end{cases}$$

これを解くと　$a=-\frac{1}{2}$，$b=-\frac{7}{2}$，

$-2c=-3$　　ゆえに　$c=\frac{3}{2}$

よって，求める直線は　$-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}y+\frac{3}{2}=0$

すなわち　$x+7y=3$

3.　上記において $r=0$（原点を通る直線）のときは

$$\frac{p}{dp-cq}=\frac{q}{aq-bp}$$ として求める．

> 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ で表される１次変換によって直線 $y=mx$ がそれと直交する直線に移されるとき，mの値を求めよ．
>
> 〔87 慶応大〕

$$\begin{array}{ccc} -1 & & 4 \\ m & & -1 \\ -3 & & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{1-4m} \\ \mathbf{6m-3} \end{array}$$

$mx-y=0$ つまり $r=0$ のときでこれが

$y=-\frac{1}{m}x$ すなわち $-\frac{1}{m}x-y=0$ に移されるから比をとる．

（原点を通る直線は原点を通る直線に移る）

$$\frac{-\frac{1}{m}}{6m-3}=\frac{-1}{1-4m}$$

これを解くと $6m^2+m-1=0$

ゆえに　$m=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

4.　行列が逆行列をもたないとき

> **１次変換の性質**
>
> １次変換 f を表す行列が逆行列をもたないとき
>
> 1　平面全体は，f によって原点を通る直線に移される．
>
> 2　直線は原点を通る直線，または１点に移される．

２を求めるのはもっと簡単で行列を見ただけで解答できる．

> 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ で表される１次変換 f によって，直線 $2x-3y=4$ はどんな図形に移されるか．

$|A|=4\cdot9-(-6)(-6)=0$ であるから

$$4\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

直線 $\mathbf{1}x-\frac{3}{2}y=k$ は $(4k,\ -6k)$ へ移る．（＊）

（x の係数は $+1$ にする，A の第１列 $4,\ -6$ より）

（＊）から $2x-3y=4$ は $2k=4$ より $k=2$ のときであるから $(8,\ -12)$ へ移る．

（別解）　$-6\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

直線 $-\frac{2}{3}x+y=k$ は $(-6k,\ 9k)$ へ移る．

（y の係数を $+1$ にする，A の第２列 $-6,\ 9$ より）

それ以外の傾きの直線や平面全体は $y=\frac{-6}{4}x$

すなわち $y=-\frac{3}{2}x$ へ移る．

（傾きは A の第１列の逆数より）

5.　おわりに

１次変換が行列で表現されることから行列の数の並び方を見ただけで像が解けることを生徒に話してみると，行列のすごさに驚いた表情でした．数学嫌いをなくすために答がすぐわかる方法はいかがでしょうか．

〈参考文献〉

四訂版　代数・幾何　数研出版

橋本純次　チャート式 代数・幾何　数研出版

（大阪府立　千里高等学校）