スペクトル分解

―― 固有値１の秘密 ――

小原（おはら） 實晃（じっこう）

はじめに

１次変換 $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&4\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

によって自分自身に移される直線（不動直線）は

$$y=\frac{1}{2}x \text{ と } y=-x+n\ (n\text{は任意})$$

である．

この例では，不動直線が平行直線群となって現れる．しかし，別の１次変換では，不動直線が原点を通る２本だけということも起こる．

この違いの原因は何かということも気になるが，それよりも，平行直線群が〝不変〟となることの方が更に印象深い．

私は，直線の変換を，直線のベクトル方程式（位置ベクトル表示）を用いて展開するので，ごく自然に「固有値・固有ベクトル」が前面に出てくる．

生徒は，いろんな例に当たるうちに，上述の〝現象〟が「固有値に１が出てくること」によって生じる，ということにすぐ気づく．

そこで，２時間ぐらいかけて「スペクトル分解」の話をすることにしているのだが，毎年生徒からは好評をいただいている．

以下にその骨子をまとめた次第です．

1.　Cayley-Hamilton の定理について

次のことがらを「ケーリー・ハミルトンの定理」（以下，C-H と記す）という．

C-H の定理

行列Aの**固有多項式**を

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda E)$$

とおくとき，$P(A)=O$（零行列）が成り立つ．

２次行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ では

$$P(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda^1+(ad-bc)\lambda^0 \quad\cdots\cdots①$$

であるから，$P(A)=O$ は

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \quad\cdots\cdots(*)$$

となる．ただし，定数項は

$$(ad-bc)A^0=(ad-bc)E$$

とする（以下，(＊)を C-H の等式と呼ぶ）．

教科書では，(＊)を計算で導くから，C-H が裏にかくれてしまう．

したがって，生徒にとっては①と(＊)はまったく無関係なものとなってしまう．

《例１》 $A=\begin{pmatrix}-1&4\\2&-3\end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

［解］ $A\vec{u}=\lambda\vec{u}$ $(\vec{u}\neq\vec{0})$ を解けばよい．

移項して $(A-\lambda E)\vec{u}=\vec{0}$ $\quad\cdots\cdots②$

$\vec{u}\neq\vec{0}$ であるから $\det(A-\lambda E)=0$ が成り立つことが必要十分である（斉次方程式の定理）．

$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1-\lambda&4\\2&-3-\lambda\end{pmatrix}$, $\det(A-\lambda E)=0$ から $\lambda^2+4\lambda-5=0$ ゆえに $\lambda=1,\ -5$

$\lambda=1$ のとき，②から

$$\begin{pmatrix}-2&4\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ ゆえに } \vec{u_1}\,/\!/\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda=-5$ のとき，②から

$$\begin{pmatrix}4&4\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ ゆえに } \vec{u_2}\,/\!/\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$ ■

上の解の中で出てきた $\lambda^2+4\lambda-5=0$ をAの**固有方程式**というのだが，Aについて(＊)をつくると

$$A^2+4A-5E=O$$

となり，全く同じ形となる．生徒は「不思議だ」というのである．

それはそれとして，《例１》は，実は C-H の等式(＊)さえあれば，すぐ得られるのである．

それは，次の《例２》に述べられる事実による．

これは，生徒の立場からは[定理]と呼ぶにふさわしいものである．

《例2》 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

が $(A-k_1E)(A-k_2E)=O$ と変形できたとき，k_1 と k_2 はAの固有値であり，かつ，k_i に対する固有ベクトルは $A-k_jE$ の列となって現れる．このことを示せ．$(i,\ j=1,\ 2)$

[解] Aの固有値λは

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix},\ \det(A-\lambda E)=0 \text{ から}$$

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

の解である．それを λ_1，λ_2 とすると

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=a+d \\ \lambda_1\lambda_2=ad-bc \end{cases} \quad \cdots\cdots ④$$

一方，仮定により

$$k_1+k_2=a+d,\ k_1k_2=ad-bc$$

であるから，④により

$$(k_1,\ k_2)=(\lambda_1,\ \lambda_2) \text{ or } (\lambda_2,\ \lambda_1)$$

次に，可換性により

$$(A-k_1E)(A-k_2E)=O \quad \cdots\cdots ⑤$$
$$(A-k_2E)(A-k_1E)=O$$

例えば，⑤は

$$A-k_2E=(\overrightarrow{u_1}\ \ \overrightarrow{u_1}')$$

とおくと，零因子の性質から $\overrightarrow{u_1}/\!/\overrightarrow{u_1}'$ で，かつ

$$(A-k_1E)(\overrightarrow{u_1}\ \ \overrightarrow{u_1}')=(\vec{0}\ \ \vec{0})$$

ということを表しており，これより

$$(A-k_1E)\overrightarrow{u_1}=\vec{0},\ (A-k_1E)\overrightarrow{u_1}'=\vec{0}$$

を得る．すなわち，行列

$$A-k_2E$$

の列 $\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_1}'$ が k_1 に対する固有ベクトルの代表（2つ）となっている． ■

上のことを《例1》に適用すると

$$A^2+4A-5E=O$$
$$(A-E)(A+5E)=O$$
$$(A+5E)(A-E)=O$$

から，直ちに，固有値と固有ベクトルが得られる．

2. 固有値・固有ベクトル

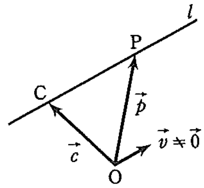
不動（変）直線の問題をめぐって，固有ベクトルが（そのために固有値が）前面に出てくる．

それにつけても，教科書では，せっかく「直線のベクトル方程式」を扱っておきながら，「直線の（図形の）変換」のところでは，それが姿を消すのはどういうことかと不思議でならない．

$$\vec{p}=\vec{c}+t\vec{v}$$

（t：パラメータ）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



この形だと，y軸に平行だとか平行でないとかの場合分けは不要である．

《例3》 1次変換 $f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

によって自分自身に移される直線を求めよ．

[解] 求める直線を

$$l:\vec{p}=\vec{c}+t\vec{v} \quad \cdots\cdots ①$$

とおく．これをfによって移すと

$$f(\vec{p})=f(\vec{c})+tf(\vec{v}) \quad \cdots\cdots ②$$

となり，②はやはり直線である．

（ここまでは教科書にもある！ fの線形性．）

②が①の上にあるためには，

$$f(\vec{v})/\!/\vec{v} \quad \cdots\cdots ③$$

であることが必要である（$\vec{0}$ はすべてのベクトルと平行であると考えて）．

fを表す行列をAとおくと，③は

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}\ (\lambda \text{ は実数，} \vec{v}\neq\vec{0})$$

と表される．

これを満たす $\vec{v}$ は，《例1》により

$$\lambda=1 \text{ のとき } \overrightarrow{v_1}/\!/\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda=-5 \text{ のとき } \overrightarrow{v_2}/\!/\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の2つある．①に戻り，次に $\vec{c}$ を求めよう．

①がy軸に平行でないことがわかったので，定点Cをy軸上にとる：$\vec{c}=\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ とおく．

$$f(\vec{c})=A\vec{c}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4n \\ -3n \end{pmatrix}$$

点$(4n,\ -3n)$が①の上にあればよい．

(i) ①が $y=\dfrac{1}{2}x+n$ のとき

$$-3n=\frac{1}{2}\times 4n+n \qquad \text{ゆえに} \quad n=0$$

(ii) ①が $y=-x+n$ のとき

$$-3n=-4n+n \qquad \text{ゆえに} \quad -3n=-3n$$

nは任意の実数！

以上により，求める直線①は

$$y=\frac{1}{2}x \text{ と } y=-x+n \ (n\text{ は任意})$$ ■

［注］ 上の解で，$\overrightarrow{v_1}$ と $\overrightarrow{v_2}$ が求まった後では，次のようにしてもよい．(C-H の等式の利用！)

(i) ①が $\vec{p}=\vec{c}+t\overrightarrow{v_1}$ のとき：

$f(\vec{c})=A\vec{c}$ が①の上にあるためには，適当な t_0 があって

$$A\vec{c}=\vec{c}+t_0\overrightarrow{v_1}$$

が成り立てばよい．この式から

$$(A+5E)\vec{c}=6\vec{c}+t_0\overrightarrow{v_1}$$

ゆえに $(A-E)(A+5E)\vec{c}=6(A-E)\vec{c}+t_0(A-E)\overrightarrow{v_1}$

よって $(A-E)\vec{c}=\vec{0}$

したがって，$\vec{c}\,/\!/\,\overrightarrow{v_1}$ である．

このときは，$\vec{c}=k\overrightarrow{v_1}$ を代入して

$$\vec{p}=(k+t)\overrightarrow{v_1}$$

(ii) ①が $\vec{p}=\vec{c}+t\overrightarrow{v_2}$ のとき：

同様にして

$$(A+5E)(A-E)\vec{c}=t_0(A+5E)\overrightarrow{v_2}$$

ゆえに $O\vec{c}=\vec{0}$

したがって，$\vec{c}$ は任意である．

もう１つ例をやっておこう．

《例４》 １次変換 $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ による不変直線を求めよ．

［解］ (途中略．f によって方向不変なベクトルを求めるところからはじめる．)

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v} \ (\lambda\text{ は実数，}\vec{v}\neq\vec{0})$$

を満たす $\vec{v}$ を求める．C-H の等式から

$$A(A-E)=O$$
$$(A-E)A=O$$

よって

$\lambda=0$ のとき $\overrightarrow{v_1}\,/\!/\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，$\lambda=1$ のとき $\overrightarrow{v_2}\,/\!/\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

求める直線は y 軸に平行ではないことがわかったので $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}$ とおく．

$$f(\vec{c})=A\vec{c}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix}$$

点 $(n/3,\ n/3)$ が①《例３》の上にあればよい．

(i) ①が $y=-2x+n$ のとき

$n/3=-2n/3+n$

ゆえに $n=n$ よって n は任意

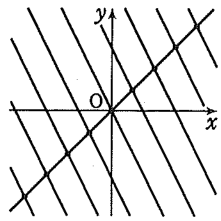
(ii) ①が $y=x+n$ のとき

$n/3=n/3+n$ ゆえに $n=0$

以上により，求める直線①は

$$y=-2x+n \ (n\text{ は任意}) \text{ と } y=x$$ ■

［注］ 図示する．



実は，平行直線群は，直線 $y=x$ との交点に移されているので，画面上には，現れてこない．この場合も，自分自身の〝中へ〟移されているという意味で「不変直線」と呼ぶのである．

3. スペクトル分解

不動(変)直線が平行直線群となって現れる現象を解明しよう(そのことによって，他の場合すなわち，原点を通る２本だけ，あるいは１本だけなどの場合も明瞭になってしまう！)

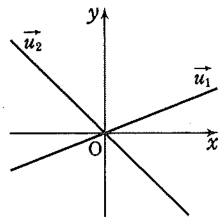
１次変換 $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&4\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ についてスペクトル分解を考える．

$A=\begin{pmatrix}-1&4\\2&-3\end{pmatrix}$ とおくとき，$A\vec{u}=\lambda\vec{u}\ (\vec{u}\neq\vec{0})$ を満たすベクトルは２つ(２つの方向！)だけ存在した(例１，例３参照)．

すなわち

$$A\overrightarrow{u_1}=1\cdot\overrightarrow{u_1}\ ;\quad \overrightarrow{u_1}=s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ (s\neq0)$$

$$A\overrightarrow{u_2}=-5\cdot\overrightarrow{u_2}\ ;\quad \overrightarrow{u_2}=t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ (t\neq0)$$



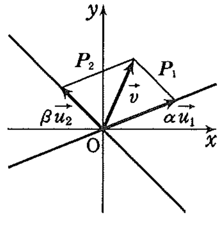
それぞれの固有値に対する固有ベクトルは無数に存在し(斉次方程式の非自明解！)，$s=t=0$ の場合も含めると，それぞれ１つの〝空間〟をなす(いまの場合は右図の直線)．

さて，ここで，固有ベクトルとして適当な大きさのもの(例えば $s=t=1$ のもの)をとり，改めて $\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ と表すことにする．

$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ は１次独立であるから，任意のベクトル $\vec{v}$ は

$$\vec{v}=\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}\ (\alpha,\ \beta\text{ は実数})$$

のように必ず表せる．



そして

$$\boldsymbol{P_1}\vec{v}=\alpha\overrightarrow{u_1}$$
$$\boldsymbol{P_2}\vec{v}=\beta\overrightarrow{u_2}$$

で定義される**射影変換** $\boldsymbol{P_1}$，$\boldsymbol{P_2}$ は次のようになる(次の

[注] 参照).

$$P_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix},\ P_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}$$

このとき次の等式が成り立つ.

$$A=1\cdot P_1+(-5)P_2 \qquad \cdots\cdots\ (☆)$$

[注] ① 射影変換の行列の求め方は教科書にもある. 例えば, P_1 を求めるには, 点 (x, y) を通り, 傾き -2 の直線が直線 $X-2Y=0$ と交わる点を (x', y') として, (x, y) を (x', y') に移す変換を連立方程式で表せばよい.

次の公式もある.

$A\overrightarrow{u_1}=\lambda_1\overrightarrow{u_1}$, $A\overrightarrow{u_2}=\lambda_2\overrightarrow{u_2}$ のとき

$$P_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2E),\ P_2=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1E)$$

これは, 射影変換 P_1, P_2 が $P_1+P_2=E$ を満たすことなどから容易に導ける.

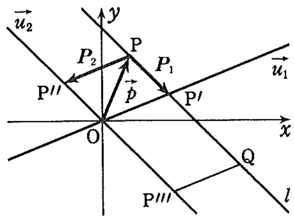
② (☆)の証明:

$$\begin{aligned}A\vec{v}&=\alpha A\overrightarrow{u_1}+\beta A\overrightarrow{u_2}=\alpha\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\beta\lambda_2\overrightarrow{u_2}\\&=\lambda_1(\alpha\overrightarrow{u_1})+\lambda_2(\beta\overrightarrow{u_2})\\&=\lambda_1P_1\vec{v}+\lambda_2P_2\vec{v}\\&=(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)\vec{v}\ \text{(分配法則)}\end{aligned}$$

$\vec{v}$ は任意であるから

$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2$$

(☆)を用いると, $\overrightarrow{u_2}$ に平行な任意の直線 l が不変直線であるということが手にとるようにわかる.



l 上の任意の点Pに対し $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$

とするとき, (☆)から

$$\begin{aligned}A\vec{p}&=(1\cdot P_1+(-5)\cdot P_2)\vec{p}\\&=1\cdot P_1\vec{p}+(-5)\cdot P_2\vec{p}\\&=1\cdot\overrightarrow{OP'}+(-5)\cdot\overrightarrow{OP''} \qquad \cdots\cdots\ (*)\\&=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OP'''}=\overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$

となり, 点Qは確かに l 上の点である.

ここでポイントとなるのは, $(*)$ の式で $1\cdot\overrightarrow{OP'}$ の部分である. $\lambda_1=1$ でなければ, 明らかに点Qは l 上から外れる!

さて, もう1本の不動直線 $x-2y=0$ ($\overrightarrow{u_1}$) 上の点はどのように動くか見てみよう.

$\overrightarrow{u_1}$ 上の任意の点をPとし, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とおくと

$$\begin{aligned}A\vec{p}&=(1\cdot P_1+(-5)P_2)\vec{p}\\&=1\cdot P_1\vec{p}+(-5)P_2\vec{p}\\&=1\cdot\overrightarrow{OP}+(-5)\cdot\vec{0}=\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

となり, Pは**不動点**であることがわかる.

すなわち, 直線 $x-2y=0$ 上の点はすべて不動点なのである. そして, この直線上以外には不動点は存在しないことも(☆)から明らかである.

《例5》 1次変換 $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

の構造を調べよ.

[解] $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$ とおく. 《例4》から

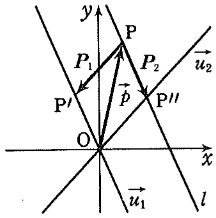
$$A\overrightarrow{u_1}=0\cdot\overrightarrow{u_1};\quad \overrightarrow{u_1}=s\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\ (s\neq0)$$

$$A\overrightarrow{u_2}=1\cdot\overrightarrow{u_2};\quad \overrightarrow{u_2}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ (t\neq0)$$

Aのスペクトル分解は

$$\begin{aligned}A&=0\cdot P_1+1\cdot P_2\\&=P_2 \qquad \cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

となる.



$\overrightarrow{u_1}$ に平行な任意の直線 l 上の点Pに対し

$$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$$

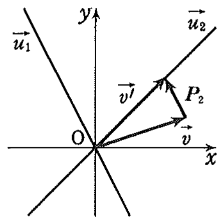
とすると

$$A\vec{p}=P_2\vec{p}=\overrightarrow{OP''}$$

すなわち, l 上の点はすべて P″ に移される.

l 上の点は, l から外れることがないので, l は不変直線である.

一方, 直線 $y=x$ ($\overrightarrow{u_2}$) 上の点は, ①から明らかなように, Aによって動かない.



また, 任意のベクトル $\vec{v}$ に対して

$$A\vec{v}=P_2\vec{v}=\vec{v'}$$

であるから, 任意の位置ベクトルは $\overrightarrow{u_2}$ 上のベクトルに移される.

すなわち, 平面上の任意の点は, $\overrightarrow{u_1}$ 方向に, $\overrightarrow{u_2}$ 上の点に移される. ■

《例6》 1次変換 $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}6&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

の構造を調べよ.

[解]　$A=\begin{pmatrix}6&-2\\-3&1\end{pmatrix}$ とおく．C-H の等式から

$$A(A-7E)=O$$
$$(A-7E)A=O$$

よって

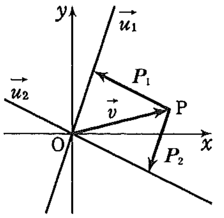
$$A\overrightarrow{u_1}=0\cdot\overrightarrow{u_1}\ ;\quad \overrightarrow{u_1}=s\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\ (s\neq0)$$

$$A\overrightarrow{u_2}=7\cdot\overrightarrow{u_2}\ ;\quad \overrightarrow{u_2}=t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ (t\neq0)$$

Aのスペクトル分解は

$$A=0\cdot\boldsymbol{P}_1+7\cdot\boldsymbol{P}_2$$
$$=7\cdot\boldsymbol{P}_2 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．



ゆえに，任意のベクトル $\vec{v}$ に対して

$$A\vec{v}=7\boldsymbol{P}_2\vec{v}$$
$$=7\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}''}$$

であるから，任意の位置ベクトルは $\overrightarrow{u_2}$ 上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}''}$ に移ったあと，7倍に伸ばされる．

したがって，$\overrightarrow{u_1}$ に平行な任意の直線は1点に縮まり，$\overrightarrow{u_2}$ 上の原点から7倍先の点に移される．

その他，平面上の点の動きは②を見れば明瞭である．不変直線は次の2本であることもわかる．

$$y=3x\ (\overrightarrow{u_1}) \text{ と } x+2y=0\ (\overrightarrow{u_2})$$ ■

最後に，固有値が1つの場合について考えよう．

《例7》　1次変換 $f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&1\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の構造を調べよ．

[解]　$A=\begin{pmatrix}-1&1\\-4&3\end{pmatrix}$ とおく．C-H の等式から

$$(A-E)^2=O$$

よって　$A\overrightarrow{u_1}=1\cdot\overrightarrow{u_1}\ ;\quad \overrightarrow{u_1}=s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ (s\neq0)$

Aのスペクトル分解は

$$A=E+(A-E) \qquad \cdots\cdots ③$$

となる(次の[注]参照).

$\overrightarrow{u_1}\not\parallel\overrightarrow{u_2}$ である $\overrightarrow{u_2}$ を1つとると，任意のベクトル $\vec{v}$ は($s=1$ として $\overrightarrow{u_1}$ をとる)

$$\vec{v}=\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}\ (\alpha,\ \beta\text{ は実数})$$

と表され，Aで移すと

$$A\vec{v}=\{E+(A-E)\}\vec{v}$$
$$=\vec{v}+(A-E)\vec{v}$$
$$=(\alpha+\beta)\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2} \qquad \cdots\cdots ④$$

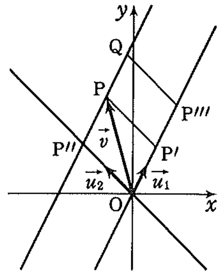
となる．

いま，$\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ をとる．

すると，④は，図で

$$A\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}'''}+\overrightarrow{\mathrm{OP}''}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

となることを示している．



すなわち，$\overrightarrow{u_1}$ に平行な直線上の点は，その直線上を動くことがわかる．

したがって，$\overrightarrow{u_1}$ に平行な直線群が不動直線である．

また，③から

$$A(\alpha\overrightarrow{u_1})=E(\alpha\overrightarrow{u_1})+\alpha(A-E)\overrightarrow{u_1}=\alpha\overrightarrow{u_1}$$

となり，直線 $y=2x$ 上の点はすべて不動点であることがわかる．■

[注]　固有値が2つのときは

$$\mathrm{E}_{\lambda_1}=\{\overrightarrow{u_1}\,|\,(A-\lambda_1E)\overrightarrow{u_1}=\vec{0}\}$$
$$\mathrm{E}_{\lambda_2}=\{\overrightarrow{u_2}\,|\,(A-\lambda_2E)\overrightarrow{u_2}=\vec{0}\}$$

によって

$$\mathrm{R}^2=\mathrm{E}_{\lambda_1}+\mathrm{E}_{\lambda_2}\ (\text{直和分割})$$

となり，E_{λ_1} と E_{λ_2} の上への射影 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ をつくり，Aを

$$A=\lambda_1\boldsymbol{P}_1+\lambda_2\boldsymbol{P}_2$$

のようにスペクトル分解したのである．

固有値が1つ(重解)のときは

$$\mathrm{G}_\alpha=\{\vec{u}\,|\,{}^\exists k\in\mathrm{N}(A-\alpha E)^k\vec{u}=\vec{0}\}$$

によって，

$$\mathrm{R}^2=\mathrm{G}_\alpha$$

となる．そして，このときは，G_α への〝射影〟は E に他ならず，Aのスペクトル分解は

$$A=\alpha E+(A-\alpha E)$$

となる(一般スペクトル分解).

[付]　スペクトル分解の応用

(1)　行列のn乗を求める：

$$A=\lambda_1\boldsymbol{P}_1+\lambda_2\boldsymbol{P}_2$$

のようにスペクトル分解されたとすると

$$\boldsymbol{P}_1{}^n=\boldsymbol{P}_1,\quad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=O,\quad \boldsymbol{P}_2{}^n=\boldsymbol{P}_2$$

であるから

$$A^n=\lambda_1{}^n\boldsymbol{P}_1+\lambda_2{}^n\boldsymbol{P}_2$$

となる．

また，$\lambda_1=\lambda_2=\alpha$ のときは

$(A-\alpha E)^2=O$ より $(A-\alpha E)^n=O\ (n\geqq2)$

したがって　$A=\alpha E+(A-\alpha E)$

から　　$A^n=\alpha^nE+n\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$

(2) 確率不動ベクトルを求める：

推移行列をA，確率ベクトルを$\vec{u}$とするとき

$$A\vec{u}=\vec{u}$$

が成り立つならば，$\vec{u}$を**確率不動ベクトル**という．

(例) 推移行列を

$$A=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ とする．}$$

Aをスペクトル分解すると

$$A=1\cdot \boldsymbol{P}_1+1/6\cdot \boldsymbol{P}_2$$

ただし，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 2/5 & -3/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

$$A^n=\boldsymbol{P}_1+(1/6)^n\boldsymbol{P}_2$$

ゆえに　$A^n \longrightarrow \boldsymbol{P}_1 \ (n\to\infty)$

また，$\vec{p}$を任意の確率ベクトルとすれば

$$A^n\vec{p}=\{\boldsymbol{P}_1+(1/6)^n\boldsymbol{P}_2\}\vec{p}$$
$$=\boldsymbol{P}_1\vec{p}+(1/6)^n\boldsymbol{P}_2\vec{p}$$

ゆえに　$A^n\vec{p} \longrightarrow \boldsymbol{P}_1\vec{p} \ (n\to\infty)$

ところが $A(\boldsymbol{P}_1\ \vec{p})=\boldsymbol{P}_1\vec{p}$ ($\because\ A\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1$) であるから

$$\boldsymbol{P}_1\vec{p}=\vec{u} \ \text{(不動ベクトル)}$$

[定理]　Aを正規確率行列とすれば

(1) A^nは$n\to\infty$のとき，各列が同じ確率ベクトル$\vec{u}$であるような行列$\boldsymbol{P}_1$に近づく．

(2) $\vec{p}$を任意の確率ベクトルとすれば，$A^n\vec{p}$は$n\to\infty$のとき$\vec{u}$に近づく．

(問)　ある市において，毎年市内の人の3％は郊外へ移住し，郊外の人の2％は市内へ移住するものとする．いま，市内の人口と郊外の人口を加えたものは一定であるとすれば，長い間には市内の人口と郊外の人口の割合はどうなるか．

〈ヒント〉　$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0.95$

$$\boldsymbol{P}_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2E)=\begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(高知県　土佐塾高等学校)