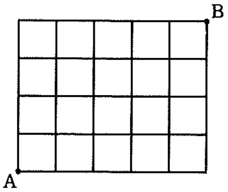
碁盤の目の図形の最長距離について

松井　隆一（まつい　りゅういち）

先日，数学の研修でフラクタル図形やランダムウォークの講義を聴いていたところ，次の問題が思い出された．

(問題)

右図のように，碁盤の目になった町で，A地点からB地点へ最短距離で行くとする．道順の総数は何通りか．

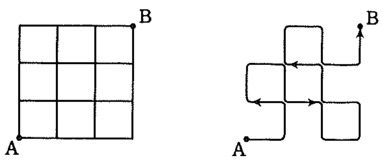


上の問題は，組合せの考え方を，うまく使うとすぐに解けてしまう．

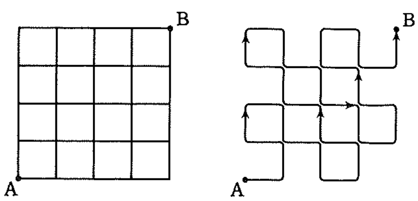
では，A地点からB地点へくねくねと遠回りをして行くと，最長距離はいくらになるだろうか．また，道順の総数は何通りあるだろうか．ただし，同じ道は1回しか通れないとする．小正方形の1辺を1とする．

まず，最長距離について，正方形の碁盤の目で考える．小さいものから実際に書いて調べてみる．

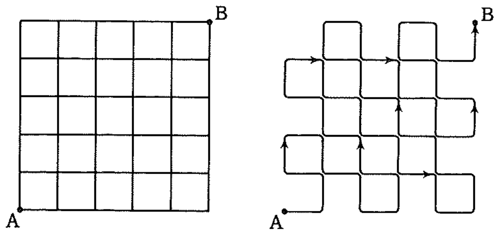
最長距離 8



最長距離 18



最長距離 32



最長距離 50

上の結果を，道の総距離と最短距離とともに表にまとめてみる．

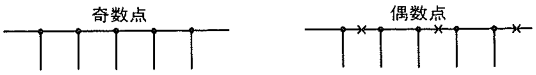
	道の総距離 P	最短距離 S	最長距離 l
1辺2の正方形	12	4	8
1辺3の正方形	24	6	18
1辺4の正方形	40	8	32
1辺5の正方形	60	10	50

表から $l=P-S$ という美しい関係がみえてくる．ここまで考えたとき，ふとこれは，一筆書きではないかと思い付いた．一筆書きの考えを使ってうまく説明できないものだろうか．

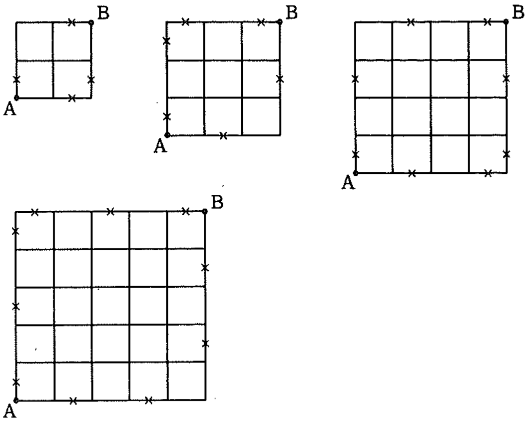
> 一筆書きのできる図形は，偶数本の辺が出ている点を偶数点，奇数本の辺が出ている点を奇数点とすると，
>
> ○偶数点ばかりの図形
>
> ○奇数点が2個で，他は偶数点ばかりの図形
>
> の2つの場合だけである．

最長距離を考えるには，A地点から出発しB地点へ行くので，A地点B地点は奇数点となり，他の点はすべて偶数点でなければならない．碁盤の目の図形では奇数点は，外周上にしかないから，小正方形の外周上の辺をできるだけ少なく取り除いて偶数点にすれば，最長距離に一筆書きできる図形になっている．そのためには，小正方形の外周上の辺を1つ

おきに取り除くとよい．



×印は取り除くことを示す．奇数点が偶数点になる．以下，実際に調べてみる．



取り除き方はこれ以外にもある．

1辺nの正方形では，取り除く小正方形の辺の数は，

nが偶数のとき，$\dfrac{n}{2}\times 4=2n$　また，

nが奇数のとき，$\dfrac{n+1}{2}\times 2+\dfrac{n-1}{2}\times 2=2n$ で

いずれにせよ$2n$取り除く．道の総距離Pは，

$P=n(n+1)\times 2=2n^2+2n$ であるから，

最長距離lは，

$l=2n^2+2n-2n=2n^2$ となる．

ちょうど取り除く小正方形の辺の数が表の最短距離Sと一致している．

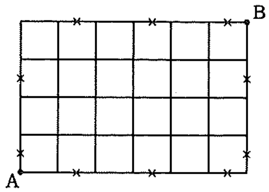
次に，長方形の碁盤の目で考えてみる．

1辺がmとnの長方形とする．

(i)　m，nとも偶数

取り除く小正方形の辺の数S

$$S=\frac{m}{2}\times 2+\frac{n}{2}\times 2$$
$$=m+n$$



道の総距離P

$$P=m(n+1)+n(m+1)$$
$$=2mn+m+n$$

よって，最長距離lは，

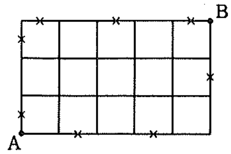
$$l=2mn+m+n-(m+n)$$
$$=2mn$$

である．

(ii)　m，nともに奇数

取り除く小正方形の辺の数S

$$S=\frac{m+1}{2}+\frac{m-1}{2}+\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}$$
$$=\frac{2m+2n}{2}=m+n$$



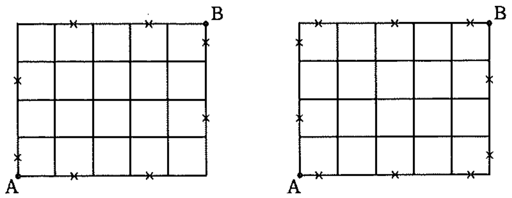
道の総距離P

$$P=m(n+1)+n(m+1)=2mn+m+n$$

よって，最長距離lは，

$l=2mn+m+n-(m+n)=2mn$ である．

(iii)　mが奇数，nが偶数



上の2つの場合が考えられるが，左の方が取り除かれる辺が少ないので，最長距離になる．

取り除く小正方形の辺の数S

$$S=\frac{m-1}{2}\times 2+\frac{n}{2}\times 2=m+n-1$$

道の総距離P

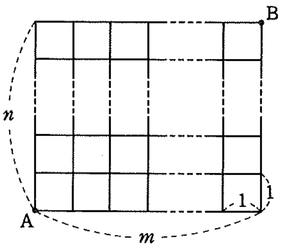
$$P=m(n+1)+n(m+1)=2mn+m+n$$

よって，最長距離lは，

$l=2mn+m+n-(m+n-1)=2mn+1$ である．

まとめ

右図のような，碁盤の目になった図形のA地点からB地点へ行く最長距離 l は，次のようになる．



ただし，小正方形の1辺を1とする．

長方形の辺を m と n とする．

(i) m，n がともに偶数，またはともに奇数のとき

$$l=2mn$$

(ii) m，n の一方が偶数，他方が奇数のとき

$$l=2mn+1$$

(iii) 特に，1辺が n の正方形のとき

$$l=2n^2$$

ちょっとした思いつきから，なかなか美しい結果が出てきたと思います．

ところで，最長距離の道順の総数は何通りあるか，いろいろ考えてみたのですが，うまく求められません．何かご存じの先生がおられましたら，お教え願います．

（大阪府立 守口東高等学校）