数列の周期について

遠藤　一成（えんどう　かずなり）

1 はじめに

受験数学では，次のようないろいろなタイプの漸化式

(1) $a_{n+1}=pa_n+q$

(2) $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

(3) $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$

(4) $\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ に関する問題がよく出題される．しかし，多くの場合，一般項 a_n を求めることにエネルギーの大半が費やされ，数列 $\{a_n\}$ はどのような性質をもち，また，その性質は漸化式とどのような関係にあるのかという議論は少ない．

本稿は，漸化式によって定義される数列 $\{a_n\}$ の1つの重要な規則性である周期にスポットライトをあて，漸化式がどのような場合に周期性をもつか必要十分条件を求めよう．

定義　すべての自然数 n に対して $a_{n+k}=a_n$ となる定数 k が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は周期的であるといい，この条件を満たす最小の自然数 k を周期とよぶ．

2 $a_{n+1}=pa_{n+1}+qa_n$

この章では，隣接3項間の漸化式

$$\begin{cases} a_1=a \\ a_2=b \\ a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad \cdots\cdots ① \end{cases}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ について考えよう．ただし，a，b，p，q は実数の定数である．

まず，結論は次のようになる．

> **定理1**　数列 $\{a_n\}$ が，3以上の周期 k をもつための必要十分条件は，①の特性方程式 $t^2=pt+q$ の2つの解が，共役な1の原始 k 乗根になることである．

補題1　$\{a_n\}$ が，3以上の周期 k をもつとき，特性方程式 $t^2=pt+q$ は実数解をもたない．

証明　特性方程式が実数解 α，β をもつと仮定して矛盾を導く．解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=p \\ \alpha\beta=-q \end{cases}$$

これを①に代入

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta^n(a_2-\alpha a_1) \quad \cdots\cdots ②$$

$n=k$ のとき

$$a_{k+2}-\alpha a_{k+1}=\beta^k(a_2-\alpha a_1)$$

周期 k であるから

$$a_2-\alpha a_1=\beta^k(a_2-\alpha a_1)$$

よって

$$(a_2-\alpha a_1)(\beta^k-1)=0$$

ここで，$a_2-\alpha a_1=0$ とすれば，②から $\{a_n\}$ は公比 α の等比数列になる．仮定より，α は実数であるから $\{a_n\}$ は3以上の周期をもたない．

したがって，$a_2-\alpha a_1\neq 0$ であるから $\beta^k=1$ である．

同様に　$\alpha^k=1$

α，β は実数であるから1または -1 でなければならない．

(1) $\alpha=\beta=1$ のとき

$$a_n=a+(b-a)(n-1)$$

(2) $\alpha=\beta=-1$ のとき

$$a_n=(-1)^n\{-a+(n-1)(a+b)\}$$

(3) α，β が1と -1 のとき

$$a_n=\frac{1}{2}\{a+b+(-1)^n(b-a)\}$$

(1), (2), (3)のいずれにしても数列 $\{a_n\}$ は3以上の周期をもたない．これは仮定に矛盾する．

以上から，α，β は実数でない．

次の補題2はよく知られているので，証明は省略する．

補題2　$\{a_n\}$ の特性方程式が異なる2つの解 α，β をもつとき，一般項 a_n は

$$a_n=\frac{\beta^{n-1}(b-\alpha a)-\alpha^{n-1}(b-\beta a)}{\beta-\alpha}$$

で与えられる．

補題3　$\{a_n\}$ が3以上の周期 k をもつとき，特性方程式の解は，共役な1の原始 k 乗根である．

証明　補題1から，特性方程式の解 α，β は虚数であり，p，q は実数であるから，α，β は共役な複素数である．

また，補題1の証明から $\alpha^k=\beta^k=1$ であるから α，β は1の k 乗根であり，$\alpha=e^{\frac{2j\pi}{k}i}$ とおくことができる．ここで，j と k の最大公約数を d，$j=dj'$，$k=dk'$ とおくと

$$\alpha=e^{\frac{2\pi dj'}{dk'}i}=e^{\frac{2j'\pi}{k'}i}$$

よって

$$\alpha^{k'}=1 \quad \cdots\cdots ③$$

である．β は α の共役複素数であるから

$$\beta^{k'}=1 \quad \cdots\cdots ④$$

補題2から

$$a_{n+k'}=\frac{\beta^{n+k'-1}(b-\alpha a)-\alpha^{n+k'-1}(b-\beta a)}{\beta-\alpha}$$

③，④を代入して

$$=\frac{\beta^{n-1}(b-\alpha a)-\alpha^{n-1}(b-\beta a)}{\beta-\alpha}$$

$$=a_n$$

周期の最小性から

$$k\leqq k'$$

$$dk'\leqq k'$$

よって，$d=1$ つまり j と k は互いに素であるから，α と β は，共役な1の原始 k 乗根である．

定理1の証明　特性方程式の解が共役な1の原始 k 乗根をもつことが十分条件であることを示せばよい．このとき，補題2から，すべての自然数 n に対して $a_{n+k}=a_n$ が成立する．

よって $\{a_n\}$ は周期的である．そこで，周期を l とすれば，補題3から，特性方程式の解 α，β は1の原始 l 乗根である．

したがって $l=k$，つまり $\{a_n\}$ は周期 k をもつ．

α と β は共役な1の原始 k 乗根であるから $e^{\pm\frac{2j\pi}{k}i}$ とおくと (ただし，j と k は互いに素)

$$p=e^{\frac{2j\pi}{k}i}+e^{-\frac{2j\pi}{k}i}=2\cos\frac{2j\pi}{k}$$

$$q=-e^{\frac{2j\pi}{k}i}\times e^{-\frac{2j\pi}{k}i}=-1$$

である．これから次の系1が得られる．

> **系1**　j と k が互いに素のとき，漸化式
>
> $$a_{n+2}=\left(2\cos\frac{2j\pi}{k}\right)a_{n+1}-a_n$$
>
> によって定義される数列 $\{a_n\}$ の周期は k である．

例　(1)　$(k,\ j)=(3,\ 1)$ のとき，周期3

$$a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n$$

(2)　$(k,\ j)=(4,\ 1)$ のとき，周期4

$$a_{n+2}=-a_n$$

(3)　$(k,\ j)=(5,\ 1)$ のとき，周期5

$$a_{n+2}=\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)a_{n+1}-a_n$$

(4)　$(k,\ j)=(6,\ 1)$ のとき，周期6

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

> **系2**　$\{a_n\}$ の周期が偶数になるための必要十分条件は，ある k が存在して，すべての自然数 n に対して $a_{n+k}=-a_n$ が成立することである．

必要条件の証明　$\{a_n\}$ の周期は偶数 $2k$ であるとする．定理1から，特性方程式の解は1の原始 $2k$ 乗根である．そこで，j と $2k$ は互いに素として

$$\alpha=e^{\frac{2j\pi}{2k}i},\quad \beta=e^{-\frac{2j\pi}{2k}i}$$

とおくことができる．このとき，j が奇数であることに注意すれば

$$\alpha^k=e^{j\pi i}=-1,\quad \beta^k=e^{-j\pi i}=-1$$

したがって

$$a_{n+k}=\frac{\beta^{n+k-1}(b-\alpha a)-\alpha^{n+k-1}(b-\beta a)}{\beta-\alpha}$$

$$=-\frac{\beta^{k-1}(b-\alpha a)-\alpha^{n-1}(b-\beta a)}{\beta-\alpha}$$

$$=-a_n$$

十分条件の証明　すべての自然数 n に対して $a_{n+k}=-a_n$ が成立する k のうち最小のものを k_0，$\{a_n\}$ の周期を l とする．l を奇数と仮定して矛盾を導く．

すべての自然数nに対して

$$a_{n+2k_0}=-a_{n+k_0}=a_n$$

よって$2k_0$はlの倍数である．$2k_0=pl$ と表すとlは奇数であるからpは偶数．$\dfrac{p}{2}=q$ とおくと

$$k_0=ql$$

よって　$a_{n+k_0}=a_{n+ql}=a_n$

これは $a_{n+k_0}=-a_n$ に矛盾する．

以上により$\{a_n\}$の周期は偶数である．

③ $x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$

この章では，１次分数関数により定義される隣接２項間の漸化式

$$x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d} \quad \cdots\cdots ⑤$$

により定義される数列$\{x_n\}$を考える．ここでa，b，c，dは実数，$c\neq0$，$\Delta=ad-bc\neq0$ とする．

また，①の特性方程式

$$x=\frac{ax+b}{cx+d} \quad \cdots\cdots ⑥$$

の解をα，βとするとき，$x_1\neq\alpha$，β も仮定する．

⑥から

$$cx^2+(d-a)x-b=0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

この２次方程式の判別式は

$$D=(d-a)^2+4bc=(a+d)^2-4(ad-bc)$$

である．

αは⑥の解であるから

$$x_{n+1}-\alpha=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}-\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$$

$$x_{n+1}-\alpha=\frac{ad-bc}{(cx_n+d)(c\alpha+d)}\cdot(x_n-\alpha) \quad \cdots\cdots ⑧$$

同様に

$$x_{n+1}-\beta=\frac{ad-bc}{(cx_n+d)(c\beta+d)}\cdot(x_n-\beta) \quad \cdots\cdots ⑨$$

よって

$$\frac{x_{n+1}-\beta}{x_{n+1}-\alpha}=\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\cdot\frac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$$

以上から，次の補題４にまとめることができる．

補題 4　$c\neq0$，$\Delta=ad-bc\neq0$，$x_1\neq\alpha$，β のとき

(1)　すべての自然数nに対して，$x_n\neq\alpha$，β

(2)　特性方程式が異なる２つの解α，βをもつとき，数列$\left\{\dfrac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}\right\}$は，公比$\dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}$の等比数列である．

補題 5　特性方程式が重解αをもつとき，数列$\left\{\dfrac{1}{x_n-\alpha}\right\}$は等差数列であり，$\{x_n\}$は周期的でない．

証明　⑦から $\alpha=\dfrac{a-d}{2c}$ であるから

$$c\alpha+d=c\cdot\frac{a-d}{2c}+d=\frac{a+d}{2} \quad \cdots\cdots ⑩$$

重解をもつから $D=0$ により

$$4(ad-bc)=(a+d)^2 \quad \cdots\cdots ⑪$$

⑩，⑪を⑧に代入して

$$x_{n+1}-\alpha=\frac{a+d}{2(cx_n+d)}\cdot(x_n-\alpha)$$

両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{x_{n+1}-\alpha}=\frac{2(cx_n-c\alpha+c\alpha+d)}{(a+d)(x_n-\alpha)}$$

⑩から

$$\frac{1}{x_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{x_n-\alpha}+\frac{2c}{a+d}$$

以上から，$c\neq0$ により，公差$\dfrac{2c}{a+d}$ $(\neq0)$ の等差数列である．

分数漸化式 $x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$，により定義される数列$\{x_n\}$の周期について，次の定理としてまとめることができる．

> **定理 2**　次の(1)，(2)，(3)は同値である．
>
> (1)　$\{x_n\}$の周期はkである．
>
> (2)　$\dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}$は１の原始$k$乗根である．
>
> (3)　行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の固有方程式の解は，$\Delta^k$の原始$2k$乗根である．

(1)⇒(2)の証明

補題５から，特性方程式は異なる２つの解α，βをもつ．補題４(2)から

$$\frac{x_{k+1}-\beta}{x_{k+1}-\alpha}=\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^k\cdot\frac{x_1-\beta}{x_1-\beta}$$

周期がkであるから

$$\frac{x_1-\beta}{x_1-\alpha}=\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^k\cdot\frac{x_1-\beta}{x_1-\alpha}$$

$x_1\neq\beta$ により

$$\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^k=1$$

また，周期の最小性から$\dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}$は１の原始$k$乗根

である．

(2)⇒(3)の証明

(2)の条件を満たすとき，c と d は実数であるから，特性方程式の解 α，β は虚数でなければならない．

よって　$D=(a+d)^2-4(ad-bc)<0$

である．以下 $a+d=T$，$ad-bc=\Delta$ と書くことにする．α と β は⑦から $\dfrac{a-d\pm\sqrt{D}}{2c}$ であるから

$$c\alpha+d=\frac{a-d+\sqrt{D}}{2}+d=\frac{T+\sqrt{4\Delta-T^2}\,i}{2}$$

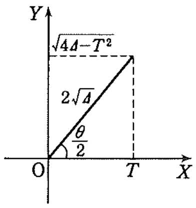
$$c\beta+d=\frac{a-d-\sqrt{D}}{2}+d=\frac{T-\sqrt{4\Delta-T^2}\,i}{2}$$

よって

$$\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}=\frac{T+\sqrt{4\Delta-T^2}\,i}{T-\sqrt{4\Delta-T^2}\,i}$$

ここで $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{4\Delta-T^2}}{T}$

とおくと



$$\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}=\frac{1+\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)i}{1-\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)i}=e^{i\theta}$$

したがって，(2)の仮定から $e^{i\theta}$ は1の原始 k 乗根である．

また

$$T=a+d=2\sqrt{\Delta}\cos\frac{\theta}{2}$$

これを行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$t^2-(a+d)t+ad-bc=0$$

に代入すると

$$t^2-\left(2\sqrt{\Delta}\cos\frac{\theta}{2}\right)t+\Delta=0$$

したがって

$$(t-\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{i\theta}{2}})(t-\sqrt{\Delta}\,e^{-\frac{i\theta}{2}})=0$$

つまり，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式の解は Δ^k の原始 $2k$ 乗根である．

(3)⇒(1)の証明

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式の解は，Δ^k の原始 $2k$ 乗根であるから $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k=-\Delta^{\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

そこで　$x_{n+1}=\dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$ を

$$x_{n+1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x_n)$$

と書くことにすれば，よく知られているように

$$x_{k+n}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k(x_n)=\begin{pmatrix} -\Delta^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & -\Delta^{\frac{k}{2}} \end{pmatrix}(x_n)$$

$$=\frac{-\Delta^{\frac{k}{2}}\cdot x_n+0}{0\cdot x_n-\Delta^{\frac{k}{2}}}=x_n$$

よって，$\{x_n\}$ は周期的である．周期を l とすれば $l\leqq k$ である．また(1)⇒(2)⇒(3)の証明により行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式の解は Δ^l の原始 $2l$ 乗根であるから $l=k$ でなければならない．

例　周期 k の数列を作ろう．

$$\begin{cases} x_1=\tan\alpha \\ x_{n+1}=\dfrac{x_n\cos\theta-\sin\theta}{x_n\sin\theta-\cos\theta} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

ここで $\theta=\dfrac{\pi}{k}$，$0<\alpha<\dfrac{\theta}{2}$ とする．

実際 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$t^2-(2\cos\theta)t+1=0$$

であるから，固有方程式の解は $e^{\pm i\theta}=e^{\pm\frac{\pi}{k}i}$ であり，1の原始 $2k$ 乗根である．

したがって定理2から $\{x_n\}$ は周期 k をもつ．

注意　簡単な計算により実は

$$x_n=\tan\left\{\alpha-\frac{(n-1)\pi}{k}\right\}$$

である．

4 応　用

最後に，次のような少し変わった非線形の漸化式

$$\begin{cases} y_{n+1}=\dfrac{p+y_{n+1}}{y_n} \\ y_1=a \\ y_2=b \end{cases}$$

の特別な場合の周期を求めよう．ただし $a>0$，$b>0$，$p\geqq 0$ とする．

> **性質**　数列 $\{y_n\}$ は
> (1)　$p=0$ のとき，周期6
> (2)　$p=1$ のとき，周期5　である．

証明　(1)　$p=0$ のとき $y_{n+2}=\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$

両辺の対数をとると

$\log y_{n+2} = \log y_{n+1} - \log y_n$

$\boxed{2}$例(4)から $\{\log y_n\}$ の周期は 6 であり，$\{y_n\}$ の周期も 6 である．

(2)　$p=1$ のとき，任意の自然数 n に対して

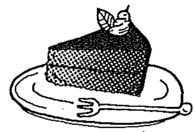
$$y_{n+5} = \frac{1+y_{n+4}}{y_{n+3}} = \frac{1+\dfrac{1+y_{n+3}}{y_{n+2}}}{y_{n+3}}$$

$$= \frac{1+y_{n+2}+y_{n+3}}{y_{n+2}y_{n+3}}$$

$$= \frac{1+y_{n+2}}{y_{n+3}} \times \frac{1}{y_{n+2}} + \frac{1}{y_{n+2}} = \frac{y_{n+1}+1}{y_{n+2}}$$

$$= y_n$$

よって，周期 5 をもつ．



(愛知県　滝高等学校)