極値および x 軸との共有点が有理数となる整数係数の3次関数の決定

清水（しみず）　克芳（かつよし）

微分の学習で関数のグラフをかくとき，極値をとるどきの x の値が整数値であれば，グラフがかきやすい．ついでに x 軸との共有点も整数値ならば，積分を使っての面積の計算も容易である．このように都合のいい関数があれば，特にマークセンスの問題に仕上げるには持って来いである．しかしそんな関数が本当にあるのだろうか．また仮にあったとしても，複雑なものにならないだろうか．あれこれ思いながらも，まずは3次関数について，表題のものを探してみた．

本論に入る前に簡単な断わりをしておく．本来ならば x 軸との共有点も極値もともに整数にしたいが，3次関数の導関数は2次の係数に必ず3が現れるため，無理に整数にしようとすると係数が大きくなるだけである．それを避けて，表題の表現に留めた．だから実質は x 軸との共有点は整数，極値をとるときの x の値は分母が3である有理数であるような関数を求めることが目的である．

求める関数は

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c) \qquad (a,\ b,\ c\in \mathrm{Z})$$

とおけるが，平行移動により $c=0$ としてよい．よって改めて

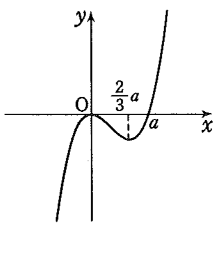
$$f(x)=x(x-a)(x-b) \qquad \cdots\cdots ①$$

とおいて考える．

まず，グラフが x 軸と接するときは $b=0$ としてよいから，①は

$$f(x)=x^2(x-a)$$

となる．両辺を微分して



$$f'(x)=3x^2-2ax$$
$$=x(3x-2a)$$

よって，グラフが x 軸と接するときは，極値をとるときの x の値は必ず有理数 $\dfrac{2a}{3}$（a が3の倍数であれば整数）になるため，目的の関数が得られる．

次にグラフが x 軸と異なる3点で交わるときを考える．このときは①において $a\neq b$，$ab\neq 0$ である．①を微分すると

$$f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab$$

$f'(x)=0$ が有理数解をもつためには判別式

$$D/4=(a+b)^2-3ab=a^2+b^2-ab$$

が整数の平方になればよい．よって問題は

$$a^2+b^2-ab=m^2 \ (m\in \mathrm{Z}) \qquad \cdots\cdots ②$$

の整数解 a，b，m（ただし $a\neq b$，$ab\neq 0$）の組を求めることになった．

②を満たす整数を求める方法は後で触れることにして，先に解答を記す．k，l を任意の整数とするとき，a，b，m は

$$a=(k+l)(k-l)$$
$$b=k(k+2l)$$
$$m=k^2+l^2+kl$$

で表される．

それでは関数の具体例を見てみよう．

例1． $k=2$，$l=1$ のとき $a=3$，$b=8$

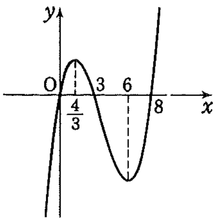
$$f(x)=x(x-3)(x-8)$$
$$=x^3-11x^2+24x$$
$$f'(x)=3x^2-22x+24$$
$$=(x-6)(3x-4)$$

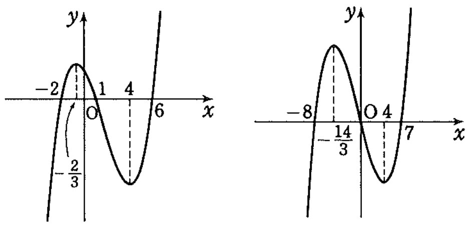
例1において x を -2 だけ平行移動すれば，

$$g(x)=(x+2)(x-1)(x-6)$$
$$=x^3-5x^2-8x+12$$
$$g'(x)=3x^2-10x-8$$
$$=(x-4)(3x+2)$$

例2． $k=3$, $l=1$ のとき
$a=8$, $b=15$　更に x を
8平行移動すると

$f(x)=x(x+8)(x-7)$
$\quad =x^3+x^2-56x$
$f'(x)=3x^2+2x-56$
$\quad =(x-4)(3x+14)$





(例1,2.のグラフ)

さて，②の整数解であるが，次のようにして得られる．$m=a+t$ とおくと

$$a^2-ab+b^2=(a+t)^2$$
$$=a^2+2at+t^2$$

ゆえに　$a=\dfrac{b^2-t^2}{b+2t}$

ここで $b=\dfrac{k}{n}$, $t=\dfrac{l}{n}$ (k, n, $l\in\mathrm{Z}$)

とおけば

$$a=\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{l}{n}\right)^2}{\frac{k}{n}+\frac{2l}{n}}=\frac{k^2-l^2}{n(k+2l)},$$

$$m=a+t=\frac{k^2-l^2}{n(k+2l)}+\frac{l}{n}=\frac{k^2+l^2+kl}{n(k+2l)}$$

となって，②の有理数解 a, b, m が得られる．これらを整数にするにはそれぞれに $n(k+2l)$ を掛ければよい．よって k, l を任意の整数とするとき

$$a=(k+l)(k-l)$$
$$b=k(k+2l)$$
$$m=k^2+l^2+kl$$

と表される．またこのとき

$$f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab$$
$$=3x^2-2(2k^2+2kl-l^2)x$$
$$+k(k+2l)(k+l)(k-l)$$
$$=\{x-k(k+l)\}\{3x-(k-l)(k+2l)\}$$

となるから，極値をとるときの x の値は

$$x=k(k+l),\ \frac{(k-l)(k+2l)}{3}$$

である．

以上のようにして，表題を満たす整数係数の3次関数が得られた．ただ，やむを得ないことではあるが，最初に案じたように，これらの関数は例のように係数が大きくなってしまうので，当初の目的の問題作成に役立つかどうかは微妙である．しかしこのような関数の存在が明らかになっただけでも十分に研究の意義があったといえよう．

さて，この問題の興味は，関数の存在だけに留まらず，係数決定のときに現れた不定方程式②にもあると思われる．ここにあげた解法は筆者が昔読んだ本にあった方法で導いたものが，この関数の話を熊野充博先生（広島県立沼南高等学校）にしたところ，次のような解法を教えて下さった．

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とすれば，ω と ω^2 は共役であり，$\mathrm{Q}(\sqrt{-3})$ において

$$m^2=a^2+b^2-ab=(a+b\omega)(a+b\omega^2)$$

と因数分解できる．$\mathrm{Q}(\sqrt{-3})$ は一意分解可能整域であり，有理素数が $\mathrm{Q}(\sqrt{-3})$ で素因数分解されるときは，$\mathrm{Q}(\sqrt{-3})$ の素数の共役の積として表されるから，m は k, l を整数として

$$m=(k+l\omega)(k+l\omega^2)=k^2+l^2-kl$$

とおけて

$$(a+b\omega)(a+b\omega^2)=(k+l\omega)^2(k+l\omega^2)^2$$

となる．$\mathrm{Q}(\sqrt{-3})$ における単数は

$$\pm1,\ \pm\omega,\ \pm\omega^2$$

の6つであるから

$$a+b\omega=\pm(k+l\omega)^2,\ \pm\omega(k+l\omega)^2,$$
$$\pm\omega^2(k+l\omega)^2$$

が得られる．ここで例えば，$a+b\omega=(k+l\omega)^2$ のときは，$\omega^2+\omega+1=0$ に注意すれば

$$a+b\omega=(k+l\omega)^2=k^2+2kl\omega+l^2\omega^2$$
$$=(k^2-l^2)+(2kl-l^2)\omega$$

から，係数比較して，

$$a=(k-l)(k+l),\ b=l(2k-l)$$

が得られる．(先の式と若干形が異なるが，k や l の取り方によって，実は同じものであることがわかる.)

他にも因数分解を使うなど，ここにあげた以外の解法もいろいろ考えられるため，自力で解いてみるのも面白いであろう．

更に，②の不定方程式は，幾何学的にも意味づけできる．最後にこのことについても触れておこう．

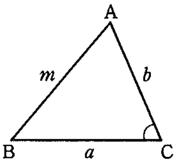
ここまで読んだ方の中には薄々気がついている方もあろうが，②の不定方程式 $m^2=a^2+b^2-ab$ は，直角三角形の3辺に関する Pythagoras 方程式 $a^2+b^2=c^2$ に類似している．このことから②と三角形の辺との関係を調べよう．

△ABC において

$\mathrm{AB}=m$

$\mathrm{BC}=a$

$\mathrm{CA}=b$



とおくと，余弦定理から

$m^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

が得られる．この式と②を比較すると，$\cos C=\frac{1}{2}$ となるから，$C=60°$ を得る．すなわち②の自然数解から，3辺が整数値かつ，1つの角が 60° である三角形が得られる．また，②の整数解を，$ab<0$ とれば，$\cos C=-\frac{1}{2}$ となるから，1つの角が 120° の三角形が得られる．これらの三角形の各辺の組は，いくつかの文献に掲載されているため，興味ある方は参照されるとよい．

なお，一松信教授が著書「$\sqrt{2}$ の数学」の中で，1つの角が 120° である三角形を，Pythagoras 三角形に対応して Eisenstein 三角形と呼ぶことを提案されている．このように特別な三角形に適当な名をつけることは，数学に親しみやすくなり，教育上の効果が大きいと思われるため，ぜひとも普及させたいものである．

このように，戯れに思いついた3次関数についての性質が，意外に身近な三角形と関連があることは新たな驚きであり，数学の水脈は地下の奥深くではつながっているという言葉を改めて実感した．

参考文献

1) 「初等整数論講義」高木貞治著　共立出版
2) 「$\sqrt{2}$ の数学」一松信著　海鳴社
3) 「きれいに解ける問題作り」
斎木清治著　黎明書房

(広島県 広島女学院高等学校)