平均値の定理の拡張と応用について

柳田　五夫（やなぎだ　いつお）

1.　平均値の定理とその拡張

この章の定理はすべて，次の Rolle の定理から証明される．

> **Rolle の定理**　$f(x)$ が $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能であって，更に，$f(a)=f(b)$ ならば，$f'(c)=0$，$a<c<b$ を満たす c が存在する．

$f(a)=f(b)$ という条件を外したものが，次の平均値の定理である．

> **平均値の定理**　$f(x)$ が $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能ならば，
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$
> を満たす c が存在する．(Lagrange)

平均値の定理において，分母を一般の関数に拡張したものが，次の Cauchy の平均値の定理である．

> **Cauchy の平均値の定理**　$f(x)$ および $g(x)$ が $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能であって，$(a,\ b)$ で $g'(x)\neq 0$ ならば，
> $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad a<c<b$$
> を満たす c が存在する．

● Cauchy の平均値の定理で $g(x)=x$ とおいたものが Lagrange の平均値の定理である．

次の Taylor の定理も平均値の定理の拡張になっている．

> **Taylor の定理**　$f(x)$，$f'(x)$，……，$f^{(n-1)}(x)$ は $[a,\ b]$ で連続で，$(a,\ b)$ で $f^{(n)}(x)$ が存在するとき，
> $$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c),$$
> $a<c<b$ を満たす c が存在する．

● Taylor の定理で $n=1$ のときが平均値の定理である．

Cauchy の平均値の定理と Taylor の定理を拡張したものが次の定理である．(有名なのかもしれないが，初見)

> **定理 1**　$f(x)$，$f'(x)$，……，$f^{(n-1)}(x)$，$g(x)$，$g'(x)$，……，$g^{(n-1)}(x)$ は $[a,\ b]$ で連続で，$(a,\ b)$ で $f^{(n)}(x)$，$g^{(n)}(x)$ が存在して $g^{(n)}(x)\neq 0$ ならば，
> $$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}g''(a)-\cdots-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a)}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}\quad\cdots\cdots(1)$$
> を満たす c $(a<c<b)$ が存在する．

(1)の左辺の分母は Taylor の定理から

$$\frac{(b-a)^n}{n!}g^{(n)}(\xi),\quad a<\xi<b$$

と等しくなるから (分母)$=\dfrac{(b-a)^n}{n!}g^{(n)}(\xi)\neq 0$

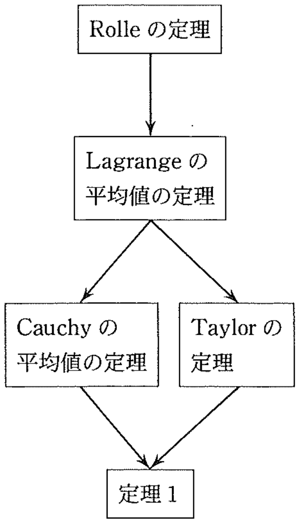
(1)の左辺を k とおき

$$h(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$
$$-k\left\{g(b)-g(x)-(b-x)g'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}g''(x)-\cdots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(x)\right\}$$

に対して Rolle の定理を適用すればよい．

● 定理 1 において，$g(x)=(x-a)^n$ とおいたものが Taylor の定理である．

●平均値の定理系



2. 平均値の定理の応用

数研通信 No. 20 の「教科書の章末問題から」で北嶋先生は

> $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ が連続のとき
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a) \quad \cdots\cdots (*)$$
>
> が成り立つ.

を証明されていますが, $(*)$ の拡張と, $f''(x)$ の連続性までは仮定せず, 有限な $f''(a)$ の存在を仮定しても $(*)$ は成立することを示したい.

(2. 1) $(*)$ の証明 1

> **補題** $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ が $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ で連続のとき
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\frac{1}{2}f''(a) \quad \cdots\cdots (2)$$

[証明] Taylor の定理から

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2f''(c)$$

を満たす c が a と $a+h$ の間に存在する.

$h>0$ のとき $a<c<a+h$,

$h<0$ のとき $a+h<c<a$ より $h\to 0$ のとき $c\to a$ となるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\lim_{c\to a}\frac{1}{2}f''(c)$$

$$=\frac{1}{2}f''(a)$$ ■

[$(*)$ の証明] (2)が成り立つから, $k=-h$ とおくと

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)+hf'(a)}{h^2}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)-kf'(a)}{k^2}$$

$$=\frac{1}{2}f''(a)$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)+hf'(a)}{2}=\frac{1}{2}f''(a)$ …… (3)

よって (2)+(3) から $(*)$ を得る. ■

上の証明からわかるように, Taylor の定理を用いると(2)すなわち $(*)$ と同様な式が得られる.

例えば, $f(x)$, $f'(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$ が $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ で連続なとき, Taylor の定理から

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{2}f''(a)-\frac{h^3}{6}f'''(a)}{h^4}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)+hf'(a)-\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(a)}{h^4}$$

$$=\frac{1}{24}f^{(4)}(a)$$

よって

> $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$ が $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ で連続なとき
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)-h^2f''(a)}{h^4}$$
>
> $$=\frac{1}{12}f^{(4)}(a) \quad \cdots\cdots (**)$$
>
> が成り立つ.

注 1 $f(x)$ が c^4 級のとき, $(**)$ は $(*)$ の拡張になっている. なぜならば, $(**)$ が成り立つとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)-h^2f''(a)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)-h^2f''(a)}{h^4}\times h^2$$

$$=\frac{1}{12}f^{(4)}(a)\times 0=0$$

すなわち $(*)$ が成り立つからである.

(2. 2) $(*)$ の証明 2

Cauchy の平均値の定理を用いても $(*)$ が成り立

つことが示せる．

〔(＊)の証明〕 $F(x)=f(a+x)+f(a-x)-2f(a)$, $G(x)=x^2$, $x\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ とおくと

$$\frac{F(h)}{G(h)}=\frac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},\quad 0<\xi<h$$

を満たす ξ が存在する．$h\to+0$ のとき $\xi\to+0$ であるから

$$\lim_{h\to+0}\frac{F(h)}{G(h)}=\lim_{\xi\to+0}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\lim_{\xi\to+0}\frac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+0}\left\{\frac{f'(a+\xi)-f'(a)}{\xi}+\frac{f'(a-\xi)-f'(a)}{-\xi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f''(a)+f''(a)\}=f''(a)$$

$F(x)$, $G(x)$ は偶関数であるから $k=-h$ とおくと

$$\lim_{h\to-0}\frac{F(h)}{G(h)}=\lim_{k\to+0}\frac{F(-k)}{G(-k)}=\lim_{k\to+0}\frac{F(k)}{G(k)}=f''(a)$$

したがって(＊)は成り立つ． ▩

上の証明では，$f''(x)$ の連続性まで必要とせず，$f''(a)$ の存在だけで十分である．よって

> $f(x)$, $f'(x)$ が $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ で連続で，$f''(a)$ が存在するとき
>
> $$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a) \qquad (＊＊)$$
>
> が成り立つ．

$f''(a)$ が存在すれば(＊＊)は成立する．しかし，$f''(a)$ が存在しなくても，(＊＊)の左辺の極限値が存在することがある．

例 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ や

$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ で $a=0$ のとき

(＊＊)の左辺の極限値が存在するとき，シュワルツにしたがって，それを $f(x)$ の**一般な2階微分係数**というそうで，参考文献[2]には，

> $[a,\ b]$ で連続な $f(x)$ が $(a,\ b)$ で
>
> $$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=0$$
>
> を満たすならば，$f(x)$ は $[a,\ b]$ で1次式に等しい．(シュワルツの定理)

が章末問題に載せられている．

〔注〕 (Lagrangeの)平均値の定理を使って(＊＊)を証明できる．

(1) $f''(x)$ の $x=a$ における連続性を仮定し，

$g(x)=f(x)-f(x-h)$ とおくと

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\ (=I(h)\ とする)$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\cdot g'(a+\theta_1h)\ (0<\theta_1<1)$$

$$=\frac{f'(a+\theta_1h)-f'(a+\theta_1h-h)}{h} \qquad \cdots\cdots (4)$$

$$=f''(a+\theta_1h-h+\theta_2h)\ (0<\theta_2<1)$$

を満たす θ_1, θ_2 が存在する．

$f''(x)$ は $x=a$ において連続であるから

$$\lim_{h\to0}I(h)=\lim_{h\to0}f''(a+\theta_1h-h+\theta_2h)$$

$$=f''(a)$$ ▩

(2) $f''(a)$ の存在だけを仮定〔(4)のあとから〕

$$I_1=\frac{f'(a+\theta_1h)-f'(a)}{\theta_1h}\to f''(a)\ (h\to0)$$

$$I_2=\frac{f'(a+\theta_1h)-f'(a)}{\theta_1h}-\frac{f'(a+\theta_1h-h)-f'(a)}{(\theta_1-1)h}$$

$$\to f''(a)-f''(a)=0\ (h\to0)$$

となり，

$$\lim_{h\to0}I(h)=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+\theta_1h)-f'(a+\theta_1h-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\{I_1+(\theta_1-1)I_2\}$$

$$=f''(a)$$ ▩

[1] 北嶋佳史 教科書の章末問題から 数研通信 No. 20

[2] 小松勇作 解析概論[Ⅰ] 廣川書店

(栃木県立 栃木高等学校)