ビンゴゲームを数学の授業に

結川(ゆいかわ)　義明(よしあき)

§. はじめに

数学に興味・関心がない生徒をいかに授業に引きつけるか，我々，数学の教員にとって悩みの種である（他教科も同様かもしれないが……）.

身近にあって，楽しめる教材はないか．あれこれ考えているうちに，“ビンゴゲーム”というものに遭遇した.

以下は，確率の授業で“ビンゴゲーム”を取り上げたときの内容をまとめたものである.

大方の諸先生方の御指導・御教示を賜りたいと思います.

※ビンゴゲームを御存じない方のために

右の図のようなカードに，1～75までの異なる数字が24個書かれている.

A	B	C	D	E
		Free		

(注) A列には1～15まで
B列には16～30まで
C列には31～45まで
D列には46～60まで
E列には61～75までの数が書かれている.

1～75までの番号が書かれた玉の入った袋から，順次，玉を取り出し，縦・横・ななめのどこかに，早く1列作ることを競うゲームである．パーティーやイベント会場で行われ，意外と熱が入り，盛り上がるのである（ビンゴゲームについては，生徒の方がよく知っていると思います）.

さて，授業では，普段，使われている上のようなカードだと，複雑になるため，縦3×横3＝9マスのカードを用い，1～45までの数を使うことにした（1列が比較的できやすいので，中央には“Free”のマスは設けないことにした）.

これでも，計算が面倒なため，計算機を用いることを許可し，実際に，“ビンゴ”になる確率を求めさせた（通常，使われている卓上計算機で求めるのに困難な値については，事前にデータとして与えた）.

問題1

右の図のようなカードに，
A列には1～15までの異なる数を
B列には16～30までの異なる数を
C列には31～45までの異なる数を　入れるとする.

A	B	C

(1) 全部で，何通りのカードができるか.
(2) 3の倍数だけでできるカードは何種類あるか.

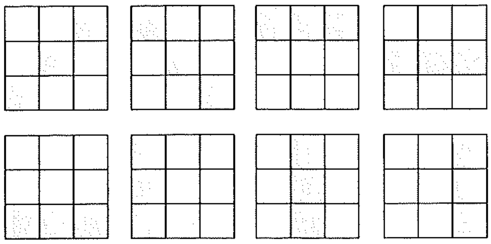
〔解〕 (1) A，B，C列の並び方はそれぞれ
$15\times14\times13=2730$（通り）
したがって，積の法則から
$2730\times2730\times2730$
$=20346417000$（通り）…（答）
このことから，このようなカードは何種類もあることが分かる.

(2) 1～15，16～30，31～45の中に3の倍数はそれぞれ5個ずつあるから，A，B，C列の並び方はそれぞれ
$5\times4\times3=60$（通り）
したがって，積の法則から
$60\times60\times60=216000$（通り）…（答）

問題2

問題1で作ったカードを使って，ビンゴゲームを行う．玉を順次取り出して
(1) 3回目でビンゴになるのは何通りあるか.
また，そのときの確率を求めよ.
(2) 4回目までにビンゴになる確率を求めよ.

〔解〕 (1) 図にかくまでもないが，



全部で 8 通りある. …… (答)

また，3 回目にビンゴになる確率は，45 個の玉から，ビンゴになる特定の 3 個の玉を取り出すことを考えればよい.

特定の 3 個の玉を取り出す確率は，

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{45}C_3}\text{ となる.}$$

よって，ビンゴになる特定の 3 個の玉の組が全部で 8 組あるから，求める確率は

$$8\times\frac{{}_3C_3}{{}_{45}C_3}\fallingdotseq 0.0005637\cdots\text{ (答)}$$

(2) 取り出した 4 個の玉の中に，ビンゴになる特定の 3 個の玉が含まれていればよい. 特定の 3 個の玉の組は(1)から 8 組あるので，求める確率は

$$8\times\frac{{}_3C_3\times{}_{42}C_1}{{}_{45}C_4}\fallingdotseq 0.0022551\cdots\text{ (答)}$$

(2)の結果から

$$1\div 0.0022551\fallingdotseq 443$$

すなわち，443 人 (ほぼ本校の一(ひと)学年分の生徒数) でビンゴをすると，4 回目までにビンゴになる者が出ることが予想される.

ただし，全員のカードが異なるものとすればの話である.

組合せ，確率を学習した生徒にとって，ここまでは比較的，容易に理解された.

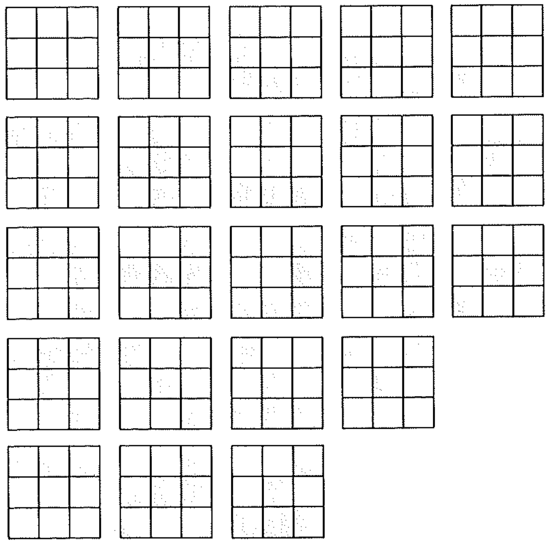
問題 3

問題 1 で作ったカードを使って，ビンゴゲームを行う. 玉を順次取り出して，5 回目までにビンゴになる確率を求めよ.

〔解〕 取り出した 5 個の玉の中に，ビンゴになる特定の 3 個の玉が含まれていればよい. 特定の 3 個の玉の組が少なくとも 1 組含まれている場合の数は，重複を許すと

$$8\times{}_3C_3\times{}_{42}C_2\text{ (通り)} \cdots\cdots ①$$

ただし，①は特定の 3 個の玉の組が 2 組含まれる場合を重複して数えている. 5 個の玉の中に特定の 3 個の玉の組が 2 組含まれる場合は，図のように，全部で 22 通りある.



※全部で 22 通りしかないので，授業では全てかき出して確認させた.

よって，5 個の玉の中に，特定の 3 個の玉が含まれる場合の数は

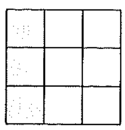
$8\times{}_3C_3\times{}_{42}C_2-22$ 通り　であるから

5 回目までにビンゴになる確率は

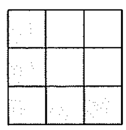
$$\frac{8\times{}_3C_3\times{}_{42}C_2-22}{{}_{45}C_5}\fallingdotseq 0.0056197\cdots\text{ (答)}$$

さて，取り出す玉が 6 個以上になると，特定の 3 個の玉が複数組含まれ，重複を考えるのが困難になる. 例えば，取り出した玉が 6 個の場合でも，下図のように，3 通りの場合が考えられる.

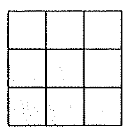
・1 組含まれる場合



・2 組含まれる場合



・3 組含まれる場合



そこで，取り出す玉が 6 個以上の場合のビンゴになる確率は，余事象の確率を使って求めることにした.

問題 4

問題 1 で作ったカードを使って，ビンゴゲームを行う．次のそれぞれの場合の数を考え，6 回目までにビンゴになる確率を求めよ．

取り出した 6 個の玉の中に

(i) カードにある数を 1 個も含まない場合

(ii) カードにある数を 1 個含む場合

(iii) カードにある数を 2 個含む場合

(iv) カードにある数を 3 個含み，それでビンゴにならない場合

(v) カードにある数を 4 個含み，それでビンゴにならない場合

(vi) カードにある数を 5 個含み，それでビンゴにならない場合

(vii) カードにある数を 6 個含み，それでビンゴにならない場合

〔解〕 (i) カードにある数以外の 36 個の玉の中から，6 個取り出す場合の数であるから

$${}_{36}C_6 \text{(通り)}$$

(ii) カードにある 9 個の数の玉の中から 1 個，それ以外の 36 個の玉の中から 5 個取り出す場合の数であるから，積の法則により

$${}_9C_1 \times {}_{36}C_5 \text{(通り)}$$

(iii) カードにある 9 個の数の玉の中から 2 個，それ以外の 36 個の玉の中から 4 個取り出す場合の数であるから，積の法則により

$${}_9C_2 \times {}_{36}C_4 \text{(通り)}$$

(iv) カードにある 9 個の数の玉の中から 3 個取り出したとき，ビンゴになるのは，問題 2 の(1)より，8 通り．

したがって，カードにある 9 個の数の玉の中から 3 個，それ以外の 36 個の玉の中から 3 個取り出し，ビンゴにならない場合の数は，積の法則により

$$({}_9C_3-8) \times {}_{36}C_3 \text{(通り)}$$

(v) カードにある 9 個の数の玉の中から 4 個取り出したとき，ビンゴになるのは，$8 \times {}_6C_1$ (通り) ある．

したがって，カードにある 9 個の数の玉の中から 4 個，それ以外の 36 個の玉の中から 2 個取り出し，ビンゴにならない場合の数は，積の法則より

$$({}_9C_4-48) \times {}_{36}C_2 \text{(通り)}$$

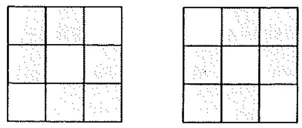
(vi) カードにある 9 個の数の玉の中から 5 個取り出したとき，ビンゴになるのは，

$$8 \times {}_6C_2 - 22 \text{(通り) ある.}$$

したがって，カードにある 9 個の数の玉の中から 5 個，それ以外の 36 個の玉の中から 1 個取り出し，ビンゴにならない場合の数は，積の法則より

$$({}_9C_5-98) \times {}_{36}C_1 \text{(通り)}$$

(vii) カードにある 9 個の数の玉の中から 6 個取り出したとき，ビンゴにならないのは，下図の 2 通りだけである．



(i)～(vii)から，ビンゴにならない場合の数は，全部で

$$\begin{aligned} &{}_{36}C_6 + {}_9C_1 \times {}_{36}C_5 + {}_9C_2 \times {}_{36}C_4 \\ &\quad + ({}_9C_3-8) \times {}_{36}C_3 + ({}_9C_4-48) \times {}_{36}C_2 \\ &\quad + ({}_9C_5-98) \times {}_{36}C_1 + 2 \text{(通り)} \end{aligned}$$

よって，6 回目までにビンゴになる確率は，余事象の定理から

$$\begin{aligned} &1-({}_{36}C_6 + 9 \times {}_{36}C_5 + 36 \times {}_{36}C_4 + 76 \times {}_{36}C_3 \\ &\quad + 78 \times {}_{36}C_2 + 28 \times {}_{36}C_1 + 2)/{}_{45}C_6 \\ &\qquad \fallingdotseq 0.0111687 \cdots\cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

カードにある 9 個の数の玉の中から 7 個以上取り出すと，どんな取り出し方をしても，ビンゴになる．したがって，取り出す玉が 7 個以上になっても，問題 4 の(i)～(vii)の場合だけを考えればよい (余事象を使う理由はここにある)．

以上のことから，r 回目までにビンゴになる確率は，次の式で求めることができる．授業では，〈まとめ〉という形で，この式を提示し，その式で求めた結果を〈プリント〉で配布した．

〈まとめ〉

問題 1 で作ったカードを使って，ビンゴゲームを行う．玉を順次取り出したとき，r 回目までにビンゴになる確率は，次の式で求められる．

$$\begin{aligned} &1-({}_{36}C_r + 9 \times {}_{36}C_{r-1} + 36 \times {}_{36}C_{r-2} + 76 \times {}_{36}C_{r-3} \\ &\quad + 78 \times {}_{36}C_{r-4} + 28 \times {}_{36}C_{r-5} + 2 \times {}_{36}C_{r-6}) \\ &\qquad /{}_{45}C_r \end{aligned}$$

(ただし，$n<r$ または $r<0$ のとき，${}_nC_r=0$ とする．)

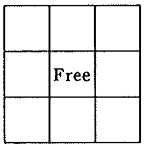
〈プリント〉

○ r 回目までにビンゴになる確率は？

r	確　率	r	確　率	r	確　率
1	0	16	0.2504676	31	0.8904532
2	0	17	0.2930434	32	0.9149019
3	0.0005638	18	0.3379431	33	0.9357151
4	0.0022551	19	0.3846705	34	0.9530057
5	0.0056198	20	0.4326873	35	0.9669679
6	0.0111687	21	0.4814260	36	0.9778691
7	0.0193631	22	0.5303035	37	0.9860386
8	0.0306006	23	0.5787361	38	0.9918544
9	0.0452051	24	0.6261529	39	0.9957270
10	0.0634175	25	0.6720104	40	0.9980798
11	0.0853894	26	0.7158051	41	0.9993288
12	0.1111801	27	0.7570862	42	0.9998591
13	0.1407547	28	0.7954660	43	1
14	0.1739857	29	0.8306295	44	1
15	0.2106566	30	0.8623418	45	1

§. 終わりに

上のプリントから，クラス40人でビンゴをしたとすると，ほぼ8回目までに優勝者が出ることになる．実際，授業で何回か実験したところ，それに近い回数で優勝者が出た(授業よりも，ビンゴゲームの方が盛り上がってしまった)．



参考までに，右の図のような，中央に“Free”のマスを設けた場合の r 回目までにビンゴになる確率とそれを求めるための式を載せておきました．当然のことながら，中央に“Free”のある場合の方が，ビンゴになりやすいということが，実証されました．

〈参考〉

$$1-({}_{37}C_r+8\times{}_{37}C_{r-1}+24\times{}_{37}C_{r-2}+28\times{}_{37}C_{r-3}+8\times{}_{37}C_{r-4})/{}_{45}C_r$$

(ただし，$n<r$ または $r<0$ のとき，${}_nC_r=0$ とする．)

○ r 回目までにビンゴになる確率は？

r	確　率	r	確　率	r	確　率
1	0	16	0.4603864	31	0.9563662
2	0.0040404	17	0.5076004	32	0.9679153
3	0.0124031	18	0.5541725	33	0.9771737
4	0.0252492	19	0.5996420	34	0.9843895
5	0.0426254	20	0.6435861	35	0.9898278
6	0.0644725	21	0.6856262	36	0.9937616
7	0.0906338	22	0.7254330	37	0.9964640
8	0.1208663	23	0.7627306	38	0.9981995
9	0.1548506	24	0.7972988	39	0.9992157
10	0.1922032	25	0.8289753	40	0.9997348
11	0.2324876	26	0.8576561	41	0.9999463
12	0.2752262	27	0.8832942	42	1
13	0.3199124	28	0.9058988	43	1
14	0.3660215	29	0.9255313	44	1
15	0.4130221	30	0.9423024	45	1

(埼玉県立 志木高等学校)