パピルスの単位分数

坂本　茂（さかもと　しげる）

世界最古の数学書とされるのは現在大英博物館(British Museum)にある4千年以前のものといわれるリンド(Rhind)蒐集のパピルス(papyrus)で，アーメス(Ahmes)が書いたものであることが判かった．その中で多くの分数を分子が1である単位分数の和として

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},\qquad \frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195},$$
$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$$

のように表している．分数の分子と分母を同時に動かすことは複雑であって，バビロニア(Babylonia)では分母が一定であったし，現在では分数の加減は分母を揃えて行うが，古代エジプト(Egypt)では分子を1にしたものを用いたと思われる．それには分子が2で分母が奇数である分数を単位分数の和に表すことが分かっていれば，どんな分数でも幾つかの単位分数の和として表すことが容易にできる．当時既に知られていたものをパピルスに記したのであろうが，アーメスはどのようにして分数を単位分数に分解したのか方法については書いてはいない．ここでその方法を考える．

自然数 $p>1$ とするとき

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

と表されるのなら $\dfrac{2}{2p-1}=\dfrac{m+n}{mn}$ より

$$m+n=2k,\quad mn=(2p-1)k$$

となる自然数 k がなければならない．すると m，n は2次方程式

$$z^2-2kz+(2p-1)k=0$$

の2つの整数解，和に分解するなら自然数解，となる．したがって

$$(z-k)^2=k(k-2p+1)$$

から右辺が平方数となるような k をみいだせばよい．あるいは

$$z^2=k(2z-2p+1)$$

であるから z^2 が $2z-(2p-1)$ で割り切れるような自然数 z があり，その商を k として m，n を z，$2k-z$ に選べばよい．ある k に対して z_1 が解なら $z_2=2k-z_1$ も解になる．

任意の自然数 p に対しこのような自然数 z は少なくとも1つは存在する．なぜなら $z=p$ とすれば z^2 は1で割り切れ商 k は p^2 となる．したがって m，n を p，$2p^2-p$ とできて

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2-p}$$

となるからである．

例えば $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{11}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{66}$ である．これを用いて

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{11}=\frac{2}{3}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66}$$

と古代エジプトではかいたわけである．この分数は $\dfrac{31}{33}=1-\dfrac{2}{33}$ であって

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{17}+\frac{1}{66}+\frac{1}{561}$$

が成り立つ．$\dfrac{2}{2p-1}$ は何通りにも $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ (m，n は整数) と表されるわけではない．

$$4k=2z+2p-1+\frac{(2p-1)^2}{2z-2p+1}$$

となるが，整数の条件により $(2p-1)^2\geqq|2z-2p+1|$ である．よって，z の取りうる範囲は

$$-(p-1)(2p-1)\leqq z\leqq p(2p-1)$$

で有限個である．m，n が自然数ならば $2z-2p+1\geqq 1$ でなければならず $p\leqq z\leqq p(2p-1)$ の範囲である．

$Q>0$ とし，任意の数 d，e に対して

$$\frac{2}{Q}=\frac{1}{Q+d}+\frac{1}{Q+e}$$

であったとすれば両辺の差をとり

$$\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q+d}+\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q+e}$$

$$=\frac{d}{Q(Q+d)}+\frac{e}{Q(Q+e)}=0$$

となる．もし d，$e>0$ なら不合理であり，$-Q<d$，$e<0$ であっても不合理である．したがって $\frac{2}{Q}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ ならば正数Qは正数 m，n の間にある．また，このことは次のようにも示される．

$$\frac{2}{Q}-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{Q}-\frac{1}{m}+\frac{1}{Q}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{m-Q}{Qm}+\frac{n-Q}{Qn}=0$$

であるが，$0<m<n$ とすれば $m-Q<0$，$n-Q>0$ でなければならず $m<Q<n$ となるからである．

以上のことから自然数pに対し自然数 m，n があって

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\quad (m<n)$$

が成り立つときは m，n の範囲は

$$p\leqq m<2p-1<n\leqq p(2p-1)$$

となることがいえた．

例えば $\frac{2}{15}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$ となるが，$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$，$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ であるから，それぞれ 5，3 で割ると $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{9}+\frac{1}{45}$ となる．$\frac{2}{15}$ を 2 つの単位分数の和に分解するとき，分母 m，n は $8\leqq m<15<n\leqq 120$ の範囲にあり，以上のほかにも $\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ と分解できるが，その他にはない．この例からも分かるように一般に単位分数の和として 1 通りには表せないが，なぜかアーメスのパピルスには 1 通りにしか記されていないという．

素数 $2p-1$ ($p\geqq 2$) に対しては 2 つの異なる単位分数の和

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

としてただ 1 通りに表される．このことは以下のように示される．

$2mn=(2p-1)(m+n)$ であるが，素数 $2p-1\geqq 3$ より

$$m=k(2p-1)\ \text{または}\ n=k(2p-1)$$

とかける．

いま $m=k(2p-1)$ であるとすれば $2kn=m+n$ より

$$(2k-1)n=k(2p-1)$$

となる．ここで，$2p-1$ は素数であり

$$n=s(2p-1)\ \text{または}\ 2k-1=s(2p-1)$$

と表される．$n=s(2p-1)$ なら $\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ は $2=\frac{1}{k}+\frac{1}{s}$ となり k，s は自然数であるから $k=s=1$ のときにだけ成り立つ．このとき，$m=n=2p-1$ となるのであるが，これは $m\neq n$ に反する．もし $2k-1=s(2p-1)$ であるとすれば，$sn=k$ である．

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{k(2p-1)}+\frac{1}{n}$$

より $2n=\frac{n}{k}+2p-1$ であるが，これは $\frac{1}{s}=2n-(2p-1)$ とかけ，右辺が自然数であるから $s=1$ でなければならない．よって $n=p=k$，したがって $m=p(2p-1)$ である．

$n=k(2p-1)$ であれば，同様に $m=p$，$n=p(2p-1)$ となり

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p(2p-1)}$$

が唯一の和である．

分子が 2 の分数は分母に 1 を加えた分数で近似すると単位分数になるが，そのときの誤差はこの分母と元の分母の積を分母とするやはり単位分数である．分母が大きければ $\frac{2}{99}=\frac{1}{50}+\frac{1}{4950}$ などのように誤差は小さい．アーメスはなぜか $\frac{2}{3}$ だけは単位分数では表さず特別な記号を使ったという．その理由ははっきりしないが $\frac{1}{2}$ で近似したとすると誤差が $\frac{1}{6}$ と大きいからであるかも知れない．次の分数 $\frac{2}{5}$ を $\frac{1}{3}$ で近似すると誤差は $\frac{1}{15}$ と小さくなってゆく．

[定理 1]　Pが奇数のとき 3 数 P，m，n が互いに素で，$m\neq n$

$$\frac{2}{P}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

と表す仕方は，Pを互いに素な 2 数 u，v の積

$P=uv$ に分ける仕方の数だけある．

《証明》 互いに素な数 u，v により $P=uv$ であるとすると，P，m，n が互いに素で
$2mn=P(m+n)=uv(m+n)$ であるから

$$m=ku,\quad n=k'v$$

でなければならない．なお $m=kuv$ は $u=P$，$v=1$ の場合として扱う．すると k と v は素，k' と u は素である．

$$2kk'=ku+k'v$$

であるが，$k(2k'-u)=k'v$ となり $2k'-u=sv$，$ks=k'$ となる．同様に $k'(2k-v)=ku$ から $k's'=k$ となる．したがって

$s=s'=1$，$k=k'=\dfrac{1}{2}(u+v)$ となるから $\dfrac{2}{P}$ は $P=uv$ に対し

$$\frac{2}{uv}=\frac{1}{u(u+v)/2}+\frac{1}{v(u+v)/2}$$

と異なる2つの単位分数の和としてただ1つに表される．ゆえに $\dfrac{2}{P}$ を2つの単位分数の分母と P が互いに素であるようにそれらの和で表す仕方は，P の約数の数を k（1は約数に入れず P 自身は約数に数える）とするとき $\dfrac{k+1}{2}$ 通りである．3つの分母に約数がある場合は $(k-1)$ 通りある．2つの単位分数が等しいときと，和の順序を考えなければ $3k$ 通りとなる． ▩

例えば定理1から，2つの単位分数の和への分解は，P が素数ならただ1つだけ，$P=15=1\times15=3\times5$ では3つの分母に約数がないもの，約数があるものそれぞれ2つずつの4つの和がある．

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{9}+\frac{1}{45}$$

また定理1と同様にして $P=uv$ で u，v が素のとき $\dfrac{1}{P}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ の分解で P，m，n が互いに素であるものは

$$\frac{1}{uv}=\frac{1}{u(u+v)}+\frac{1}{v(u+v)}$$

が唯一である．

〈推測〉 $\dfrac{a}{b}$ は a 個の $\dfrac{1}{b}$ の和になり

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{a-1}{2}\,\dfrac{2}{b}$，$\dfrac{a}{2}\,\dfrac{2}{b}$ であるから3つまたは2つの異なる分母の分数の和になり，分子はもとの分子よりも小さい．これを続ければ幾つかの単位分数の和になる．同じ単位分数の組があれば，まとめて分子が1より大きくなるが，同様にしていけば全て異なる単位分数の和に分解できる．すなわち次の定理2が成り立つことが予想できるが，有限回のうちに異なる単位分数の和となるかどうか示さなければならない．

［定理2］ 分数 $\dfrac{a}{b}$ $(a<b)$ は有限個の異なる単位分数の和で表される．

《証明》 b を a で割って商 q と余り r を得たとする．すなわち

$$b=aq+r\ \ (0<r<a)$$

であるから $b>aq$ より $\dfrac{a}{b}<\dfrac{1}{q}$ である．そこで $\dfrac{1}{q+1}$ との差をとると

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{q+1}=\frac{aq+a-b}{b(q+1)}=\frac{a-r}{b(q+1)}$$

とかける．ここで $0<a-r<a<b$ であり

$$0<\frac{a-r}{b(q+1)}<\frac{a}{b(q+1)}<\frac{1}{q+1}<1$$

となる．よって $\dfrac{1}{q+1}$ は $\dfrac{a}{b}$ を超えない最大の単位分数である．

ここで $a_1=a-r$，$b_1=b(q+1)$ とおけば $a_1<b_1$ であり同様に

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a-r}{b(q+1)}=\frac{1}{q_1+1}+\frac{a_1-r_1}{b_1(q_1+1)}$$

$b_1=a_1q_1+r_1$ $(0<r_1<a_1)$ とかけて

$$\frac{1}{q_1+1}<\frac{a_1}{b_1}<\frac{1}{q+1}$$

であるから $q_1>q$ である．したがって

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q_1+1}+\frac{a_2}{b_2},$$
$$a_2=a_1-r_1,\qquad b_2=b_1(q_1+1)$$

となる．更に $a_2<b_2$ であるから同様にして有限回のうちに

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q_1+1}+\frac{1}{q_2+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{q_n+1},$$
$$(q<q_1<\cdots\cdots<q_n)$$

のように異なる単位分数の和で表され $\dfrac{1}{q_k+1}$ は $\dfrac{a_k}{b_k}$ を超えない最大の単位分数である． ▩

この定理の証明は分数を単位分数の和で表す方法も与えており，例えば

$$\frac{29}{73}=\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{701}+\frac{1}{2456304}$$

のように表せる．この方法による単位分数の和は1通りである．

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}$$

となるが，最初に最大の単位分数がくるようにするには定理2の証明により

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$$

である．$\frac{3}{7}$ を1つの単位分数で近似するには 4^{-1} よりは 3^{-1} がよく，2つの単位分数の和で近似するには $4^{-1}+7^{-1}$ よりは $3^{-1}+11^{-1}$ の方が誤差は小さい．すなわち分数をある個数の単位分数の和で近似するには定理2の証明を使った方法が最良である．

$a=2$ のときは $r=1$，$b=2q+1$ であるから

$$\frac{2}{2q+1}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(2q+1)(q+1)}$$

となるが，これは $q+1=p$ として最初の式であることが分かる．

$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ より

$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$$

$$=\frac{1}{32}+\frac{1}{36}+\frac{1}{40}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\frac{1}{180}+\frac{1}{480}$$

であることが分かる．恒等式 $2p=(2p-1)+1$ の両辺を $p(2p-1)$ で割ることにより

$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p(2p-1)}$ を得る．更にこの両辺を $2p$ で割った式を用いて3つの単位分数の和に分けることが可能である．

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{2p^2(2p-1)}$$

更にこの両辺を $4p^2$ で割った式を用いて

$$\frac{2}{2p-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{4p^3}+\frac{1}{8p^4}+\frac{1}{8p^4(2p-1)}$$

となる．これは更に続けることができ

$$\frac{2}{2p-1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2^{k-1}p^k}+\frac{1}{2^{k-1}p^k(2p-1)}$$

となる．

例えば $p=2$，$n=3$ とすると次のようになる．

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}+\frac{1}{2048}$$

$$+\frac{1}{8192}+\frac{1}{32768}+\frac{1}{98304}$$

このほかにも例えば p が奇数ならば $p=2q-1$ として

$$\frac{2}{4q-3}=\frac{1}{2q}+\frac{1}{2q(2q-1)}+\frac{1}{(2q-1)(4q-3)}$$

と3つの単位分数の和で表され $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{91}$ $=\frac{1}{7}+\frac{1}{98}+\frac{1}{1274}$ などと $2p-1$ が素数であっても1通りとは限らない．

$$2ab=(2ab-a-b)+(a+b)$$

$$=(2ab-a-b)+a+b$$

を使って，a，b が偶数，奇数のとき2つおよび3つの単位分数に分解する式

$$\frac{2}{(a+b)(2ab-a-b)}$$

$$=\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{ab(2ab-a-b)}$$

$$\frac{2}{2ab-a-b}$$

$$=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(2ab-a-b)}+\frac{1}{a(2ab-a-b)}$$

が作れる．例えば，これによって以前の式から知られるものと合わせて

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=\frac{1}{18}+\frac{1}{630}$$

$$=\frac{1}{21}+\frac{1}{105}=\frac{1}{20}+\frac{1}{140}$$

$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}=\frac{1}{34}+\frac{1}{2312}+\frac{1}{154904}$$

となる．恒等式 $2b=(2b-a)+a$ の両辺を $ab(2b-a)$ で割って

$$\frac{2}{a(2b-a)}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{b(2b-a)}$$

となるが，これは定理1の証明で得た式と同じものである．

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{84}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$$

$\frac{2}{21}$，$\frac{2}{35}$ などは定理1により，異なる2つの単位分数への分解は4通りである．

古代エジプトでも単位分数の和は分母を並べてかいたといわれる．そこで

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_k}=[a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_k]$$

と表すことにすると $\frac{2}{13}$ は $[7,\ 91]$ が唯一である．

$[7]=[8,\ 56]$，$[91]=[140,\ 260]=[92,\ 8372]=[98,\ 1274]=[104,\ 728]$ だけが２つの単位分数への分解となる．したがって $\frac{2}{13}=2[13]$ を３つの単位分数に分けると

$$[8,\ 56,\ 91]=[7,\ 140,\ 260]=[7,\ 92,\ 8372]=[7,\ 98,\ 1274]=[7,\ 104,\ 728]$$

が考えられる．この他にも $\frac{2}{13}$ の３つの単位分数への分解は存在する．

$2ab=P+a+b$ が成り立つときは $2[P]=[ab,\ aP,\ bP]$ であり $2[P]=[m,\ aP,\ bP]$ ならばこの形で $m=ab$ である．また $a,\ b\leqq P+1$ であり，この形で $P=13$ のときは $2[13]=[13,\ 14,\ 181]=[10,\ 26,\ 65]$ のみである．

同様に $2abc=P+a+b+c$ が成り立つときは $2[P]=[abc,\ abP,\ bcP,\ caP]$ となる．$a,\ b,\ c$ を $2,\ 3,\ 4$ とすると $2[39]=[24,\ 234,\ 312,\ 468]$ であり３倍して $2[13]=[8,\ 78,\ 104,\ 156]$ である．しかし $2[P]=[m,\ uP,\ vP,\ wP]$ となる形はこれだけではない．例えば

$$2[P]=[m,\ 2P,\ 4P,\ 6P],$$
$$2[P]=[m,\ 3P,\ 5P,\ 6P]$$

では P，m が決まってしまい，それぞれ $2[13]=[12,\ 26,\ 52,\ 78]$，$2[13]=[10,\ 37,\ 65,\ 78]$ となる．

$$2[P]=[m,\ 2P,\ 6P,\ 8P],$$
$$2[P]=[m,\ 2P,\ 3P,\ 5P]$$

ではともに $P=29$ であり $2[29]=[24,\ 58,\ 174,\ 232]=[30,\ 58,\ 87,\ 145]$ となる．

単位分数に関したものを２，３挙げよう．最初は第７回全米数学オリンピックの第３問である．

$[a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_k]=1$ を満たす（相異なるとは限らない）正整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_k$ によって整数 n が $n=a_1+a_2+\cdots+a_k$ とかけるとき整数 n を**よい整数**と呼ぶことにする．いま n がよい整数だとすると $[2a_1,\ 2a_2,\ \cdots\cdots,\ 2a_k]=[2]$ である．また $[4,\ 4]=[3,\ 6]=[2]$ であるから

$$[4,\ 4,\ 2a_1,\ 2a_2,\ \cdots\cdots,\ 2a_k]$$
$$=[3,\ 6,\ 2a_1,\ 2a_2,\ \cdots\cdots,\ 2a_k]=1$$

となって，$2n+8$，$2n+9$ もよい整数となる．このことから n から $2n+7$ までがよい整数なら $n+1$ から $2(n+1)+7$ までがよい整数であることがいえる．そこでもし，33 から $73=2\cdot 33+7$ までがよい整数だと仮定すれば 33 以上の整数はみなよい整数であることになる．

次は単位分数が作る三角形である．

$${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$$

が成り立つことにより ${}_nC_r$ によるパスカル(B. Pascal)の三角形が作れるが

$$\frac{1}{(n+1){}_nC_{r-1}}+\frac{1}{(n+1){}_nC_r}=\frac{1}{n{}_{n-1}C_{r-1}}$$

が成り立つことが分かるので $\frac{1}{(n+1){}_nC_r}$ による三角形を作ることができるが，これはライプニッツ(G. W. Leibniz)の調和三角形と呼ばれている．これによると

$$1=[2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\ 56,\ \cdots\cdots],$$
$$[3]=[4,\ 20,\ 60,\ 140,\ 280,\ \cdots\cdots]$$

などが成り立つことがいえる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5}
\end{array}$$

また数列の和の問題から，次のような単位分数の式が得られる．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r)}$$
$$=\frac{1}{r(r!)}-\frac{1}{r(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}$$

（東京都立 新宿高等学校）