4次関数の性質

「1対$\sqrt{2}$」規則

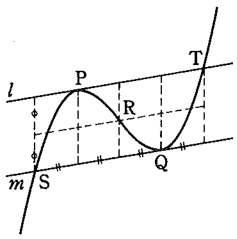
岡　多賀彦

1. はじめに

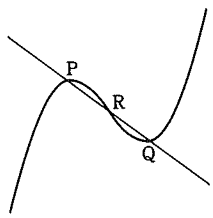
2次関数のグラフの性質については，「放物線 $y=x^2$ の極・極線」で紹介した．[1)]

3次関数 $y=x^3-3ax$ $(a>0)$ のグラフの性質については，しばしば大学入試問題に登場し，よく知っている生徒も多い．

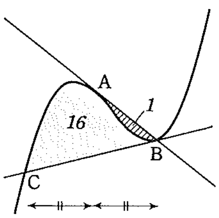
京都大学(87年)では，3次関数のグラフの「等間隔」規則[2)]が出題された．3次関数のグラフが2本の平行な直線 l，m と2点P，Qで接するとき，合同な8個の平行四辺形が作る区画の特別な点S，T，グラフの変曲点Rを通る．



一橋大学(70年)では，3次関数が極大値，極小値をとるグラフ上の2点を通る直線が出題された．3次関数をその導関数で割ったとき最高1次の余りとなるが，その余りを関数とする方程式が表す直線は3次関数が極大値，極小値をとるグラフ上の2点P，Qを通る．[2)]

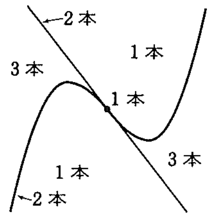


東京大学(83年)では，3次関数のグラフと接線のグラフで囲まれた図形の面積比が出題された．3次関数のグラフ上の点Aで接線を引き，グラフとの交点をBとする．

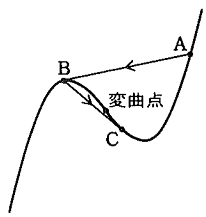


次に，点Bで接線を引き，グラフとの交点をCとする．このとき，3次関数のグラフと線分AB，BCとで囲まれた図形の面積比は1対16である．

神戸大学(88年)では，3次関数のグラフに引くことができる接線の本数が出題されている．xy 平面の上の点から3次関数のグラフに引くことができる接線の本数は，3次関数のグラフと変曲点で引かれた接線を境にして，3本と1本の領域に分かれる．変曲点では1本，境界線の残りの部分では2本である．



九州大学(92年)では，3次関数のグラフ上の点Aから点Bで接するように直線を引き，続いて点Bから点Cで接するように直線を引き，これらの作業を続けると，変曲点に限りなく近づくことが出題された．



ところで，4次関数のグラフはどのような性質をもっているだろうか．

2. 4次関数のグラフの「1対$\sqrt{2}$」規則

4次関数

$$f(x)=x^4-2ax^2+bx \quad (a>0) \tag{1}$$

について考える．

4次関数(1)のグラフが直線

$$y=mx+n$$

と，x 座標が α，β $(\alpha<\beta)$ である 2 点 A，B において，接しているとする．

このとき，

$$x^4-2ax^2+bx=mx+n$$

となるが，同時に，

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$
$$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2$$
$$\quad -2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+(\alpha\beta)^2$$
$$=0$$

と表すことができるので，係数比較

$$-2(\alpha+\beta)=0$$
$$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-2a$$
$$-2\alpha\beta(\alpha+\beta)=b-m$$
$$(\alpha\beta)^2=-n$$

から，

$$(\alpha,\ \beta)=(-\sqrt{a},\ \sqrt{a})$$
$$(m,\ n)=(b,\ -a^2)$$

となる．

これから，4 次関数(1)のグラフと 2 点 A，B で接する直線の方程式は

$$y=bx-a^2 \qquad (2)$$

となる．

次に，4 次関数(1)のグラフが直線(2)に平行な直線

$$y=bx+N$$

と，x 座標が γ である点Cで接していて，更に x 座標が δ，ε $(\delta<\varepsilon)$ である 2 点 D，E で交わっているとする．

このとき，

$$x^4-2ax^2+bx=bx+N$$

となるが，同時に，

$$(x-\gamma)^2(x-\delta)(x-\varepsilon)$$
$$=x^4-(2\gamma+\delta+\varepsilon)x^3+\{\gamma^2+\delta\varepsilon+2\gamma(\delta+\varepsilon)\}x^2$$
$$\quad -\{\gamma^2(\delta+\varepsilon)+2\gamma\delta\varepsilon\}x+\gamma^2\delta\varepsilon$$
$$=0$$

と表すことができるので，係数比較

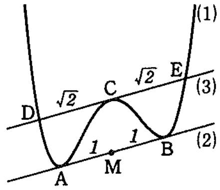
$$-(2\gamma+\delta+\varepsilon)=0$$
$$\gamma^2+\delta\varepsilon+2\gamma(\delta+\varepsilon)=-2a$$
$$-\{\gamma^2(\delta+\varepsilon)+2\gamma\delta\varepsilon\}=0$$
$$\gamma^2\delta\varepsilon=-N$$

と，$\delta\neq-\sqrt{a}$，$\varepsilon\neq\sqrt{a}$ から，

$$(\gamma,\ \delta,\ \varepsilon)=(0,\ -\sqrt{2a},\ \sqrt{2a})$$
$$N=0$$

となる．

これから，4 次関数(1)のグラフと 1 点Cで接し，2 点 D，E で交わる直線(2)に平行な直線の方程式は



$$y=bx \qquad (3)$$

となる．なお，点Cは原点Oに一致する．

したがって，線分 AB の中点をMとすると，4 つの線分の長さの間に

$$\mathrm{DC}:\mathrm{AM}:\mathrm{MB}:\mathrm{CE}$$
$$=\sqrt{2}:\ 1\ :\ 1\ :\sqrt{2}$$

の関係がある．

「基礎解析」の学習では乱雑に 4 次関数のグラフをかいているが，美しい「1 対 $\sqrt{2}$」規則があったのだ．[3)]

3．極大値，極小値をとる点を通る放物線，変曲点を通る直線

4 次関数(1)が極大値，極小値をとるグラフ上の 3 点を P，Q，R とする．

これらの 3 点を通る放物線は，(1)をその導関数

$$f'(x)=4x^3-4ax+b$$

で割った余り

$$x^4-2ax^2+bx$$
$$=(4x^3-4ax+b)\cdot\frac{x}{4}-ax^2+\frac{3}{4}bx$$

を関数とする方程式

$$y=-ax^2+\frac{3}{4}bx \qquad (4)$$

で表される．

点Pについて，x 座標を p とすると，(1)が $x=p$ で極大値，極小値をとるので，

$$f'(p)=4p^3-4ap+b=0$$

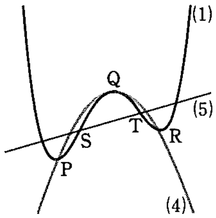
となる．

点Pの座標は $(p,\ p^4-2ap^2+bp)$ であるから，

$$p^4-2ap^2+bp=-ap^2+\frac{3}{4}bp$$

となる．

したがって，点Pは放物線(4)の上にある．



残りの2点Q，Rについても同様である．

次に，4次関数(1)のグラフの2つの変曲点をS，Tとする．

これらの2点を通る直線は，(1)をその2階導関数

$$f''(x)=12x^2-4a$$

で割った余り

$$x^4-2ax^2+bx$$

$$=(12x^2-4a)\left(\frac{1}{12}x^2-\frac{5}{36}a\right)+\underline{bx-\frac{5}{9}a^2}$$

を関数とする方程式

$$y=bx-\frac{5}{9}a^2 \qquad (5)$$

で表される．

点Sについて，x座標をsとすると，(1)の変曲点の1つが点Sであるから

$$f''(s)=12s^2-4a=0$$

となる．

点Sの座標は（s，s^4-2as^2+bs）であるから，

$$s^4-2as^2+bs=bs-\frac{5}{9}a^2$$

となる．

したがって，点Sは直線(5)の上にある．

残りの点Tについても同様である．

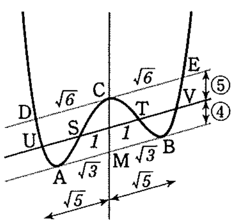
ところで，4次関数(1)のグラフとその2つの変曲点S，Tを通る直線(5)との交点のx座標は

$$x^4-2ax^2+bx=bx-\frac{5}{9}a^2$$

から，

$$x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}},\ \pm\sqrt{\frac{5}{3}a}$$

となる．



前者は2つの変曲点のx座標であり，後者は残りの2つの交点U，Vのx座標である．

このとき，4次関数(1)のグラフによって直線(5)が切り取られる線分の長さの間に

$$\mathrm{ST}:\mathrm{UV}=1:\sqrt{5}$$

の関係がある．

まとめると，4次関数(1)によって切り取られる直線(2)(3)(5)の線分の間に

$$\begin{aligned}&\mathrm{ST}:\mathrm{AB}:\mathrm{UV}:\mathrm{DE}\\ =\ &1\ :\sqrt{3}:\sqrt{5}:\sqrt{6}\end{aligned}$$

の関係がある．

また，直線(2)(3)(5)のy切片から，直線(2)と(5)，(5)と(3)の間の間隔は「4対5」である．

4. 面積における「1対$\sqrt{2}$」規則

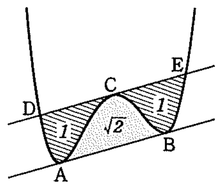
4次関数(1)のグラフと2点A，Bで接する直線(2)とで囲まれた部分（ABCA）の面積は

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\{(x^4-2ax^2+bx)-(bx-a^2)\}dx$$

$$=2\cdot\int_0^{\sqrt{a}}(x^2-a)^2dx$$

$$=\frac{16}{15}a^{\frac{5}{2}}$$

である．



一方，4次関数(1)のグラフと直線(2)に平行な点Cのみで接する直線(3)とで囲まれた部分の半分（CBEC，CADC）の面積は

$$\int_0^{\sqrt{2a}}\{bx-(x^4-2ax^2+bx)\}dx$$

$$=-\int_0^{\sqrt{2a}}(x^4-2ax^2)dx$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{15}a^{\frac{5}{2}}$$

である．

したがって，4次関数(1)のグラフ，直線(2)(3)で囲まれた部分の面積の間に

$$\begin{aligned}&\mathrm{CADC}:\mathrm{CABC}:\mathrm{CBEC}\\ =\ &\quad 1\quad :\ \sqrt{2}\ :\quad 1\end{aligned}$$

の関係がある．[3)]

ところで，4次関数(1)のグラフと2つの変曲点を通る直線(5)とで囲まれた3つの部分の面積について，CSTCの面積は

$$\int_{-\sqrt{\frac{a}{3}}}^{\sqrt{\frac{a}{3}}}\left\{(x^4-2ax^2+bx)-\left(bx-\frac{5}{9}a^2\right)\right\}dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{\frac{a}{3}}}\left(x^4-2ax^2+\frac{5}{9}a^2\right)dx$$

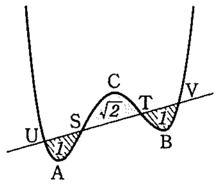
$$=\frac{32}{45\sqrt{3}}a^{\frac{5}{2}}$$

であり，SAUS, TBVT の部分の面積は

$$\int_{\sqrt{\frac{a}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}a}}\left\{\left(bx-\frac{5}{9}a^2\right)-(x^4-2ax^2+bx)\right\}dx$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{a}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}a}}(x^4-2ax^2+bx)dx$$

$$=\frac{16}{45\sqrt{3}}a^{\frac{5}{2}}$$



であるから，3 つの部分の面積について，

SAUS ： CSTC ： TBVT
＝ 1 ： 2 ： 1

の関係がある．

5. 4 次関数のグラフに引ける接線の本数

xy 平面上の点 $(p,\ q)$ から 4 次関数(1)のグラフ上の点 $(t,\ t^4-2at^2+bt)$ に接線を引くとき，

$q-(t^4-2at^2+bt)$
$=(4t^3-4at+b)(p-t)$

から

$$q=-3t^4+4pt^3+2at^2-4apt+bp \tag{6}$$

の関係がある．

点 $(p,\ q)$ から 4 次関数(1)のグラフに引くことができる接線の本数は(6)を満たす異なる実数 t の個数に一致する．[4] また，

$g(x)=-3x^4+4px^3+2ax^2-4apx+bp$

のグラフと x 軸に平行な直線 $y=q$ との交点の個数にも一致する．

$p>\sqrt{3a}$ のとき，

$$g(p)>g\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>g\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

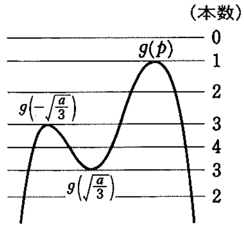
から，4 次関数(1)のグラフ，変曲点 S で引いた接線

$$y=\left(b+\frac{8a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)x+\frac{a^2}{3} \tag{7}$$

変曲点 T で引いた接線

$$y=\left(b-\frac{8a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)x+\frac{a^2}{3} \tag{8}$$

の順に境されて，接線の本数が 0，2，4，2 本の領域に分かれる．

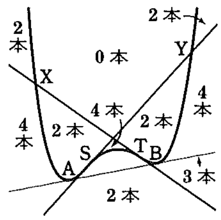


$\sqrt{\frac{a}{3}}<p<\sqrt{3a}$ のとき，(7)(1)(8)の順に境されて，接線の本数が 0，2，4，2 本の領域に分かれる．

$0<p<\sqrt{\frac{a}{3}}$ のとき，(7)(8)(1)の順に境されて，接線の本数が 0，2，4，2 本の領域に分かれる．

$p<0$ のときも同様である．なお，停留点をもつ場合や境界については別に考える．

以上から，接線の本数は図の通りである．[5]



なお，実線の境界では，両側の領域の中間の本数になる．

ここで，(1)と(7)(8)との交点 X，Y の座標は

$$(\mp\sqrt{3a},\ 3a^2\mp b\sqrt{3a})$$

である．

6. 4 次関数のグラフ上の点から次々と接線を引いたときの接点の極限値

4 次関数(1)のグラフ上でグラフ上の他の 2 点に向かって接線が引ける点を P_0 (x 座標：x_0) とし，x 座標が大きい方の接点を P_1 (x_1) とする．次に，P_1 からグラフ上の点に接線を引き，x 座標が大きい方の接点を P_2 (x_2) とする．この操作を続ける．

2 点 P_n (x_n)，P_{n+1} (x_{n+1}) の間に，

$(x_n^4-2ax_n^2+bx_n)-(x_{n+1}^2-2ax_{n+1}^2+bx_{n+1})$
$=(4x_{n+1}^3-4ax_{n+1}+b)(x_n-x_{n+1})$

の関係がある．

$(x_n-x_{n+1})^2(x_n^2+2x_nx_{n+1}+3x_{n+1}^2-2a)=0$

$x_{n+1}\neq x_n$ から，x_{n+1} に関する 2 次方程式

$$x_n^2+2x_nx_{n+1}+3x_{n+1}^2-2a=0 \tag{9}$$

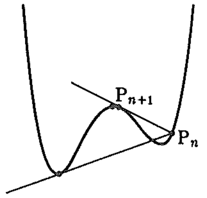
について，x_{n+1} について大きい方の解を選ぶと，

$x_{n+1}=h(x_n)$

となる．ここで，

$h(x)$

$$=\frac{-x+\sqrt{6a-2x^2}}{3} \tag{10}$$



である．

$x=h(x)$ の解が $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ であるから，平均値の定理から

$$x_{n+1}-\sqrt{\frac{a}{3}}=h'(c)\left(x_n-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \tag{11}$$

となる．ここで，c は $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ と x_n の間の適当な実数である．

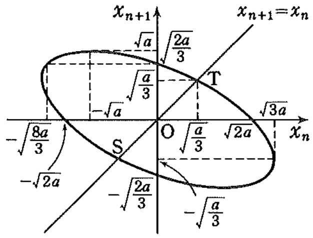
x	$-\sqrt{3a}$		$-\sqrt{\dfrac{8a}{3}}$		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{2a}$		$\sqrt{3a}$
h''	╳	—	—	—	—	—	—	—	╳
h'	╳	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	╳
h	$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	↗	$\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$	↗	$\sqrt{a}$	↘	0	↘	$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

増減表から，$-\sqrt{\dfrac{8a}{3}}<x_n<\sqrt{2a}$ のとき，$-1<h'(c)<1$ となるので，x_n は $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ に収束する．

また，3本の接線が引ける領域 $(-\sqrt{3a},\ \sqrt{3a})$ について，$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}<x_n<\sqrt{a}$ となるので，(11)から収束判定できない領域から出発しても，第2項が収束域に入ることが分かる．

したがって，4次関数(1)のグラフ上の点 P_0 からグラフ上の別の2点に対してそれらの点で接するように接線を引き，x 座標の大きい方の接点を P_1 とし，次に点 P_1 から別のグラフ上の2点に対してそれらの点で接するように接線を引き，x 座標の大きい方の接点を P_2 とし，この操作を続けていくと，x 座標の大きい方の変曲点Tに限りなく近づく．また，x 座標の小さい方の接点について同じ操作をすると，x 座標の小さい方の変曲点Sに限りなく近づく．

なお，関係式(9)を満たす x_n，x_{n+1} は図の楕円の周上の点である．



7．おわりに

大阪府立大手前高等学校で数学の授業を担当していた頃，浅野英夫先生の著書[2]に刺激されて，大学入試に出題されたり，出題される可能性のある問題を調べているとき，4次関数の「1対 $\sqrt{2}$」規則に遭遇した．[6]

高校では分かりきったことだけを教えていると考えているのは錯覚で，意外と内容のあるものが潜んでいる．

末尾ながら，大阪府を離れてからも親しくして頂いている大阪高等学校数学教育会の仲間に感謝する．

〈参考文献など〉

1) 岡 多賀彦，放物線 $y=x^2$ の極・極線
(数研通信 No.7) 数研出版　1989年

2) 浅野 英夫，名大数学のすべて
進歩研究社　1984年

3) 岡 多賀彦，3次関数の「等間隔規則」と4次関数の「1対 $\sqrt{2}$ の規則」(受験文系数学第144号)
福武書店　1988年

4) 異なる実数 t の個数は接点の x 座標の個数であるから，点線で示す直線(2)が接線の場合，4次関数のグラフと2点で接しているので，1本の接線(2)を2本に数える．ここでは(2)を2本に数えることにする．

5) 入江 捷廣　数学テクニカル事典
河合出版　1990年

6) あの朝東灘区にいた．昨年秋から時々あった小さな揺れで大震災が始まった．次の瞬間天井が1m程動く．達磨落とし．気が付くと観音開きになった本箱が体に被さっていた．北北西に0.8m移動した事務室の重い金庫がその激しさを残す．

(兵庫県 灘高等学校)